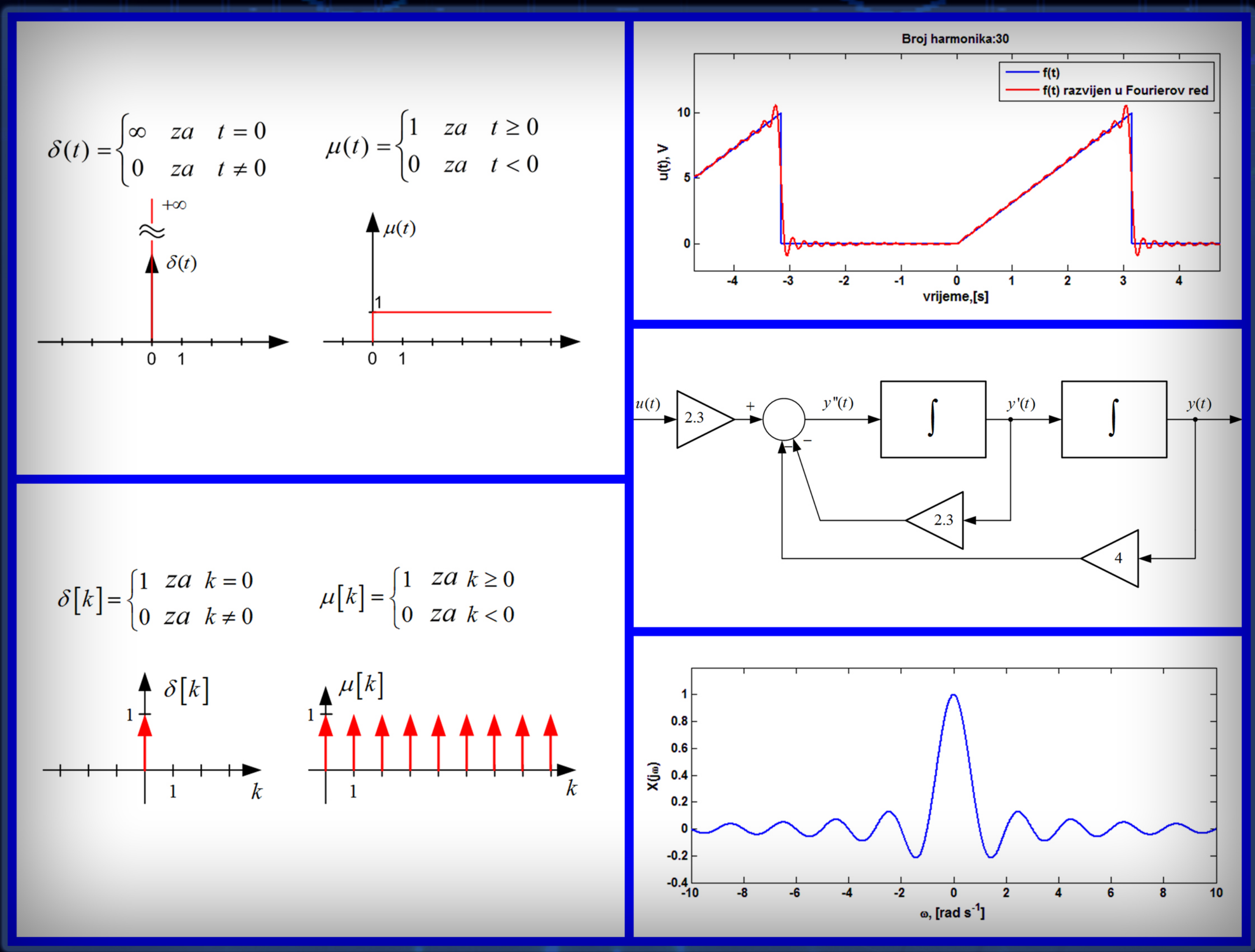
Signali i sustavi : zbirka riješenih zadataka

Vrhovski, Zoran; Purković, Dalibor

VISOKA TEHNIČKA ŠKOLA U BJELOVARU

Zoran Vrhovski ▪ Dalibor Purković



SIGNALI I SUSTAVI

Zbirka riješenih zadataka

Bjelovar, 2016.

VISOKA TEHNIČKA ŠKOLA U BJELOVARU

Signali i sustavi

Zbirka riješenih zadataka

Drugo izmijenjeno izdanje

Bjelovar, 2016.

Zoran Vrhovski, mag. ing. el. techn. inf.
Dalibor Purković, mag. ing. el. techn. inf.

SIGNALI I SUSTAVI - Zbirka riješenih zadataka

Izdavač:
Visoka tehnička škola u Bjelovaru

Za izdavača:
Prof. dr. sc. Ante Čikić

Tehnički urednik:
Zoran Vrhovski, mag. ing. el. techn. inf.

Recenzenti:
Prof. dr. sc. Stjepan Bogdan
Mr. sc. Ivan Šumiga

Lektorica:
Valentina Purković, prof.

Prijelom i oblikovanje naslovnice / grafički urednik:
Zoran Vrhovski, mag. ing. el. techn. inf.

Tisak:
Croatiagraf d.o.o. Markovac Križevački, www.croatiagraf.hr
siječanj 2016.

Naklada:
150 primjeraka

ISBN 978-953-7676-23-0
CIP zapis dostupan je u računalnom katalogu Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu pod brojem 000920365.

Zoran Vrhovski, mag. ing. el. techn. inf.
Dalibor Purković, mag. ing. el. techn. inf.

Signali i sustavi

Zbirka riješenih zadataka

Drugo izmijenjeno izdanje

Bjelovar, 2016.

Predgovor

Tko želi nešto naučiti, naći će način;
tko ne želi, naći će izliku.
Pablo Picasso

Ova je zbirka riješenih zadataka iz Signala i sustava namijenjena prvenstveno studentima Stručnog studija mehatronike na Visokoj tehničkoj školi u Bjelovaru koji slušaju kolegij *Signali i sustavi*. Ova se zbirka riješenih zadatak može koristiti i na svim drugim veleučilištima i sveučilištima koja se u sklopu svog programa bave signalima i sustavima.

Osnovni je cilj ove zbirke riješenih zadataka približiti pojmove "signala" i "sustava" studentima, ali i ostalima koji će čitati i proučavati ovaj materijal. Zbirka sadrži 167 stranica sa 75 riješenih zadataka i 75 zadataka za vježbu. Mnoga su rješenja potkrijepljena slikom. Svako poglavlje u uvodnom dijelu sadrži teorijski dio koji je potrebno proučiti za što bolje razumijevanje riješenih zadataka i zadataka za vježbu. Studentima se preporučuje da najprije prouče riješene zadatke, a nakon toga da rješavaju zadatke za vježbu. Ispravnost rješenja provjerena je korištenjem softvera *Matlab* i *Wolfram Matematica*.

Autori se zahvaljuju recenzentima prof. dr. sc. Stjepanu Bogdanu s Fakulteta elektrotehnike i računarstva te mr. sc. Ivanu Šumigi s Veleučilišta u Varaždinu na korisnim savjetima i sugestijama te lektorici Valentini Purković na strpljenju u čitanju ove zbirke i usklađivanju teksta s hrvatskim standardnim jezikom.

Posebno se zahvaljujemo Visokoj tehničkoj školi u Bjelovaru na financijskoj potpori bez koje ovo drugo izmijenjeno izdanje zbirke ne bi bilo moguće.

Drugo izmijenjeno izdanje zbirke riješenih zadataka posvećujemo studentima Stručnog studija mehatronike Visoke tehničke škole u Bjelovaru, zbog kojih je ova zbirka i napisana. U ovom izdanju zbirke ispravljeni su svi uočeni propusti u prvom izdanju.

Zoran Vrhovski

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Kolegij *Signali i sustavi* osnovni je kolegij svih tehničkih fakulteta u svijetu. Kolegij daje osnovna znanja o signalima i sustavima koja su kasnije važna u kolegijima *Automatsko upravljanje* i *Diskretni sustavi upravljanja* na Visokoj tehničkoj školi u Bjelovaru.

Ova zbirka riješenih zadataka opisuje kontinuirane signale i sustave i diskretne signale i sustave. Osnovni je cilj kolegija *Signali i sustavi* naučiti primjenjivati alate za rješavanje diferencijalnih i diferencijskih jednadžbi kojima su opisani kontinuirani i diskretni sustavi. Sustave ćemo opisivati diferencijalnim i diferencijskim jednadžbama, Laplaceovom i Z transformacijom te Fourierovom transformacijom.

Zbirka riješenih zadataka sadrži ukupno 14 poglavlja. Prvi dio zbirke opisuje vrste signala i sustava. S obzirom na količinu sadržaja kojom se bavi područje Signala i sustava, u nastavku ćemo se zbirke orijentirati na LTI sustave (*Linear Time Invariant System*, odnosno linearne vremenski nepromjenjive sustave).

Drugi je dio zbirke posvećen kontinuiranim sustavima te rješavanju diferencijalnih jednadžbi klasičnim putem i uz pomoć Laplaceove transformacije. Na kraju je drugog dijela zbirke opisan razvoj periodičnih signala u Fourierov red te Fourierova transformacija koja predstavlja frekvencijski opis sustava.

Treći je dio zbirke posvećen diskretnim sustavima te rješenju diferencijskih jednadžbi klasičnim putem i uz pomoć Z transformacije.

Svako je poglavlje ove zbirke potkrijepljeno teoretskim uvodom u problematiku samog poglavlja.

Za provjeru ispravnosti rješenja zadataka za vježbu preporučujemo softvere *Matlab* i *Wolfram Matematica*. Sa softverom *Matlab* susrest ćemo se na auditornim vježbama iz kolegija *Signali i sustavi*.

Svi riješeni zadaci tematski će pratiti predavanja iz kolegija *Signali i sustavi* na Visokoj tehničkoj školi u Bjelovaru. Redovitim dolaskom na predavanja i redovitim rješavanjem ovih zadataka uspjeh ne bi trebao izostati.

Poglavlje 2

Vrste signala

Signali su matematičke funkcije koje predstavljaju fizikalnu veličinu ili varijablu te sadrže informaciju o ponašanju ili prirodi određene pojave. Vrste signala su:

- vremenski kontinuirani signali,
- vremenski diskretni signali,
- periodični signali i aperiodični signali,
- parni i neparni signali
- i drugi.

Signali koji su definirani za čitav raspon nezavisne vremenske varijable t i nemaju prekide nazivaju se **vremenski kontinuirani signali** (primjer: $x(t) = e^{-t}\sin(2\pi t), t \in \mathbf{R}$). Signali koji su definirani za diskretne vrijednosti slobodne varijable k nazivaju se **vremenski diskretni signali** (primjer: $x[k] = e^{-k}\sin(2\pi k), k \in \mathbf{Z}$).

Kontinuirani signal $x(t)$ periodičan je ako postoji $T > 0$ takav da za svaki t vrijedi:

$$x(t) = x(t + kT) \quad k = 1, 2, 3, ... \tag{2.1}$$

Broj T naziva se period signala $x(t)$. Najmanji period (ako postoji) nazivamo osnovni ili temeljni period signala $x(t)$. Kontinuirani signal $x(t)$ je aperiodičan ako nije periodičan. Zbroj dvaju periodičnih signala $x_1(t)$ i $x_2(t)$:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \tag{2.2}$$

s osnovnim periodima T_1 i T_2 bit će periodičan s periodom T ako $\exists p, q \in \mathbf{Z}$ takvi da vrijedi:

$$T = pT_1 = qT_2 \tag{2.3}$$

Signal je paran ako vrijedi:

$$x(-t) = x(t), \forall t, t \in \mathbf{R}, \tag{2.4}$$

a neparan ako vrijedi:

$$x(-t) = -x(t), \forall t, t \in \mathbf{R}. \tag{2.5}$$

Ako signal $x(t)$ ne zadovoljava relacije (2.4) i (2.5), tada signal nije ni paran ni neparan.

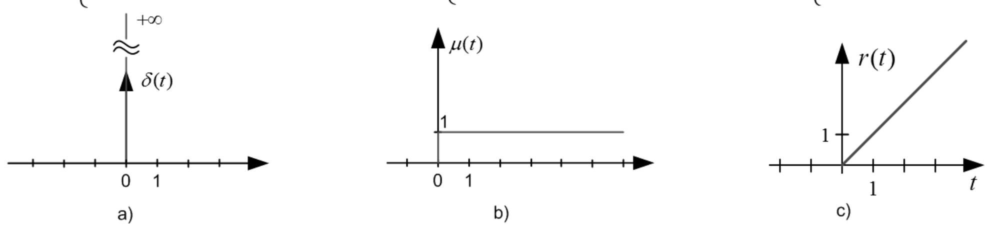
Za umnoške signala vrijedi:

- paran $\times$ paran $=$ paran,
- neparan $\times$ paran $=$ neparan,
- neparan $\times$ neparan $=$ paran.

Osnovni kontinuirani signali kojima ćemo se baviti su:

- *dirac* delta signal $\delta(t)$ (slika 2.1 a)),
- jedinični step signal $\mu(t)$ (slika 2.1 b)),
- rampa $r(t)$ (slika 2.1 c)),
- eksponencijalni signal $e^{\sigma t}$,
- trigonometrijski signali tipa $\sin(\omega t)$ i $\cos(\omega t)$ te
- kombinacije navedenih signala.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & za \quad t = 0 \\ 0 & za \quad t \neq 0 \end{cases} \qquad \mu(t) = \begin{cases} 1 & za \quad t \geq 0 \\ 0 & za \quad t < 0 \end{cases} \qquad r(t) = \begin{cases} t & za \quad t \geq 0 \\ 0 & za \quad t < 0 \end{cases}$$



Slika 2.1: Neki osnovni kontinuirani signali i njihove definicije

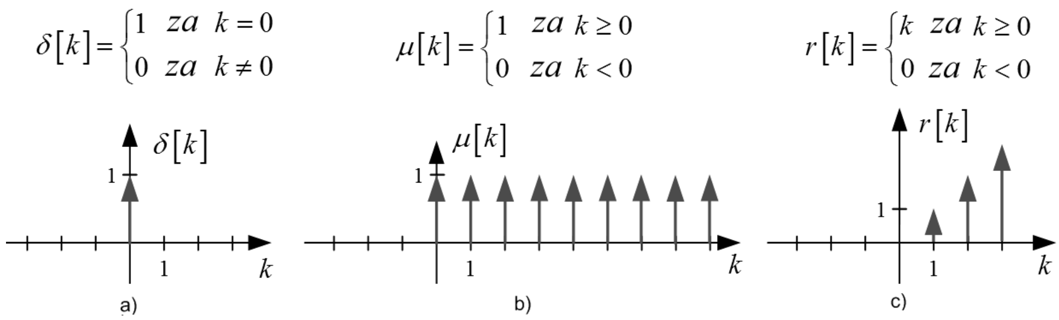
Za osnovne kontinuirane signale sa slike 2.1 vrijede sljedeće relacije:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)d = 1 \\ &\mu(t) = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)dt \Rightarrow \delta(t) = \frac{d}{dt}\mu(t) \\ &r(t) = \int_{0^-}^{\infty} \mu(t)dt \Rightarrow \mu(t) = \frac{d}{dt}r(t) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Osnovni diskretni signali kojima ćemo se baviti su:

- Kronecker delta signal $\delta[k]$ (slika 2.2 a)),
- jedinični step signal $\mu[k]$ (slika 2.2 b)),
- rampa $r[k]$ (slika 2.2 c)),
- eksponencijalni signal $e^{\sigma k}$,

- trigonometrijski signali tipa $\sin(\omega k)$ i $\cos(\omega k)$ te
- kombinacije navedenih signala.



Slika 2.2: Neki osnovni diskretni signali i njihove definicije

Za osnovne diskretne signale sa slike 2.2 vrijede sljedeće relacije:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta[i]=1$$
$$\mu[k]=\sum_{i=0}^{k}\delta[i]\Rightarrow\delta[k]=\mu[k]-\mu[k-1] \tag{2.7}$$
$$r[k]=\sum_{i=0}^{k}\mu[i-1]\Rightarrow\mu[k]=r[k+1]-r[k]$$

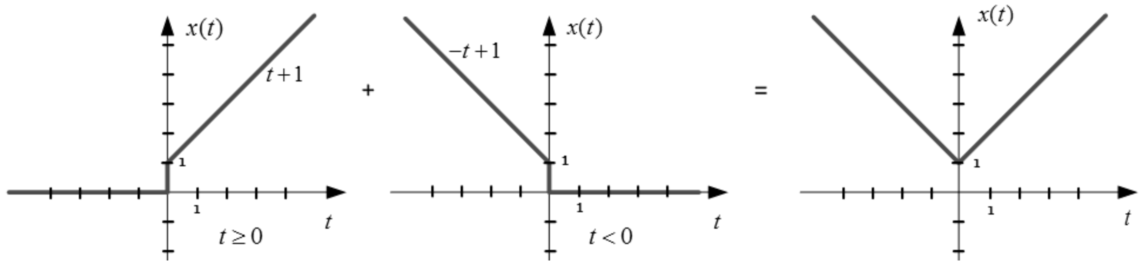
Transformacijom vremenske varijable t mogu se dobiti novi signali. Sljedeće su transformacije vremenske varijable su posebno važne:

- **Pomak signala**
  - Pomak signala udesno za vrijednost $t_0>0$ provodi se supstitucijom nezavisne vremenske varijable t s $t-t_0$ $(y(t)=x(t-t_0))$.
  - Pomak signala ulijevo za vrijednost $t_0<0$ provodi se supstitucijom nezavisne vremenske varijable t s $t+t_0$ $(y(t)=x(t+t_0))$.
- **Zrcaljenje signala** provodi se promjenom predznaka nezavisne vremenske varijable t $(y(t)=x(-t))$
- **Skaliranje signala** provodi se množenjem nezavisne vremenske varijable t s konstantom $(y(t)=x(at), a>0)$. Pri tome:
  - ako je $a<1$, tada se skaliranje naziva ekspanzijom signala,
  - ako je $a>1$, tada se skaliranje naziva kompresijom signala.

Primjer 2.1. Nacrtajte kontinuirani vremenski signal:

$$x(t)=\begin{cases}t+1 & za \quad t\geq 0\\ -t+1 & za \quad t<0\end{cases}, t\in\mathbf{R}.$$

Rješenje Kontinuirani signal $x(t)$ sastoji se od dva segmenta. Jedan je segment definiran za pozitivnu nezavisnu vremensku varijablu t, a drugi za negativnu nezavisnu vremensku varijablu t. Signal se može nacrtati u koracima kao što je prikazano na slici 2.3. Najprije se nacrta jedan segment, zatim drugi pa se ti segmenti zbroje.

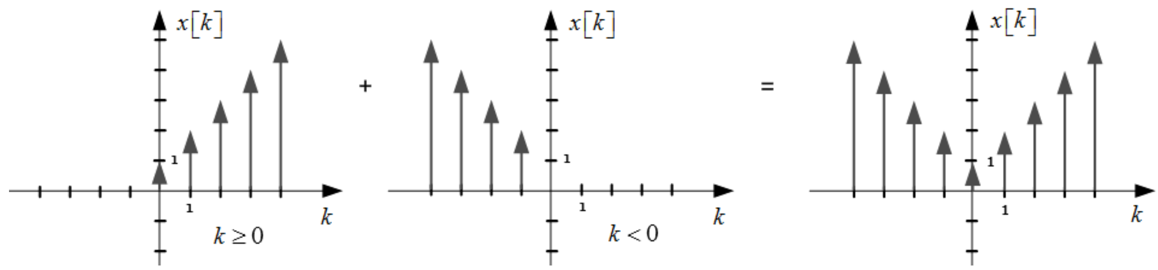


Slika 2.3: Graf signala $x(t)$, primjer 2.1.

Primjer 2.2. Nacrtajte diskretni vremenski signal:

$$x[k] = \begin{cases} k+1 & za \quad k \geqslant 0 \\ -k+1 & za \quad k < 0 \end{cases}, k \in \mathbf{Z}.$$

Rješenje Diskretni signal $x[k]$ sastoji se od dva segmenta. Jedan segment je definiran za pozitivnu nezavisnu diskretnu vremensku varijablu k, a drugi za negativnu nezavisnu diskretnu vremensku varijablu k. Signal se može nacrtati u koracima kao što je prikazano na slici 2.4. Najprije se nacrta jedan segment, zatim drugi pa se ti segmenti zbroje.



Slika 2.4: Graf signala $x[k]$, primjer 2.2.

Primjer 2.3. Odredite osnovni period sljedećih vremenskih signala:

$$x_1(t) = \cos(4t)$$
$$x_2(t) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi t\right)$$
$$x_3(t) = \tan(2t)$$
$$x_4(t) = 4\sin(\pi t)\cos(\pi t)$$
$$x_5(t) = t\cos t.$$

Rješenje Da bi neki signal bio periodičan mora vrijediti:

$$x(t) = x(t+T), \forall t \in \mathbf{R}, T > 0$$

gdje je T osnovni period signala $x(t)$. Za signal $x_1(t)$ vrijedi:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos(4t) \\ x_1(t+T) &= \cos(4(t+T)) = \cos(4t+4T) \end{aligned}$$

S obzirom da je osnovni period signala $\cos t$ jednak 2π, tada mora vrijediti:

$$4T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}.$$

Prema tome, osnovni period signala $x_1(t)$ iznosi $T = \frac{\pi}{2}$ s. Period trigonometrijskih signala $\sin(\omega t)$ i $\cos(\omega t)$ može se izračunati na temelju kružne frekvencije $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Relacija za izračunavanje perioda je $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Kružna frekvencija signala $x_1(t) = \cos(4t)$ iznosi $\omega = 4$ rad s^{-1}. Prema tome, osnovni period signala $x_1(t)$ iznosi $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ s.

Za signal $x_2(t)$ vrijedi:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \sin\left(\frac{3}{2}\pi t\right) \\ x_2(t+T) &= \sin\left(\frac{3}{2}\pi(t+T)\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi t + \frac{3}{2}\pi T\right). \end{aligned}$$

S obzirom da je osnovni period signala $\sin t$ jednak 2π, tada mora vrijediti:

$$\frac{3}{2}\pi T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{4}{3}.$$

Prema tome, osnovni period signala $x_2(t)$ iznosi $T = \frac{4}{3}$ s. Kružna frekvencija signala $x_2(t) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi t\right)$ iznosi $\omega = \frac{3}{2}\pi$ rad s^{-1}. Prema tome, period signala $x_2(t)$ iznosi $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}\pi} = \frac{4}{3}$ s.

Za signal $x_3(t)$ vrijedi:

$$\begin{aligned} x_3(t) &= \tan(2t) \\ x_3(t+T) &= \tan(2(t+T)) = \tan(2t+2T). \end{aligned}$$

S obzirom da je osnovni period signala $\tan t$ jednak π, tada mora vrijediti:

$$2T = \pi \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}.$$

Prema tome, osnovni period signala $x_3(t)$ iznosi $T = \frac{\pi}{2}$ s.

Signal $x_4(t)$ umnožak je sinus i kosinus signala istih argumenata. Prema tome, potrebno je koristiti adicijske formule za sinus dvostrukog kuta:

$$\sin(2t) = 2\sin t \cos t.$$

Primijenimo li adicijsku formulu za sinus dvostrukog kuta na signal $x_4(t)$ dobit ćemo:

$$x_4(t) = 4\sin(\pi t)\cos(\pi t) = 2\sin(2\pi t).$$

Sada za signal $x_4(t)$ vrijedi:

$$x_4(t) = 2\sin(2\pi t)$$
$$x_4(t+T) = 2\sin(2\pi(t+T)) = 2\sin(2\pi t + 2\pi T).$$

S obzirom da je osnovni period signala $\sin t$ jednak 2π, tada mora vrijediti:

$$2\pi T = 2\pi \Rightarrow T = 1.$$

Prema tome, osnovni period signala $x_4(t)$ iznosi $T = 1$ s.

Na kraju za signal $x_5(t)$ vrijedi:

$$x_5(t) = t\cos t$$
$$x_5(t+T) = (t+T)\cos(t+T) = t\cos(t+T) + T\cos(t+T).$$

Osnovni je period $\cos t$ signala 2π. Uvrstimo u gornju jednadžbu $T = 2\pi$:

$$x_5(t+2\pi) = t\cos(t+2\pi) + T\cos(t+2\pi) =$$
$$t\cos t + T\cos t \neq x_5(t).$$

S obzirom da ne vrijedi:

$$x_5(t) = x_5(t+T), \forall t \in \mathbf{R}, T > 0$$

signal $x_5(t)$ nije periodičan.

Primjer 2.4. Provjerite periodičnost sljedećih signala:

$$x_1(t) = \cos(4t) + \cos(10t)$$
$$x_2(t) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi t\right) + \sin(4\pi t)$$
$$x_3(t) = \cos(4t) + \sin(4\pi t).$$

Za periodične signale odredite osnovni period.

Rješenje Zbroj dvaju periodičnih signala dat će periodični signal ako vrijedi:

$$T = pT_1 = qT_2, \quad p, q \in \mathbf{Z}.$$

Za signal $x_1(t)$ vrijedi:

$$x_1(t) = \cos(4t) + \cos(10t)$$
$$x_{1,1}(t) = \cos(4t) \Rightarrow T_1 = \frac{\pi}{2}$$
$$x_{1,2}(t) = \cos(10t) \Rightarrow T_2 = \frac{\pi}{5}.$$

Za periode signala $x_1(t)$ vrijedi:

$$pT_1 = qT_2 \Rightarrow p\frac{\pi}{2} = q\frac{\pi}{5} \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{2}{5}, p = 2, q = 5$$
$$T = p\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Budući da postoje cijeli brojevi p i q takvi da vrijedi $T = pT_1 = qT_2$, tada je signal $x_1(t)$ periodičan s osnovnim periodom T. Osnovni period signala $x_1(t)$ iznosi $T = \pi$ s.

Za signal $x_2(t)$ vrijedi:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \sin\left(\frac{3}{2}\pi t\right) + \sin(4\pi t) \\ x_{2,1}(t) &= \sin\left(\frac{3}{2}\pi t\right) \Rightarrow T_1 = \frac{4}{3} \\ x_{2,2}(t) &= \sin(4\pi t) \Rightarrow T_2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Za period signala $x_2(t)$ vrijedi:

$$\begin{aligned} & pT_1 = qT_2 \Rightarrow p\frac{4}{3} = q\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{8}, p = 3, q = 8 \\ & T = p\frac{4}{3} = 4. \end{aligned}$$

Budući da postoje cijeli brojevi p i q takvi da vrijedi $T = pT_1 = qT_2$, tada je signal $x_2(t)$ periodičan s osnovnim periodom T. Osnovni period signala $x_2(t)$ iznosi $T = 4$ s.

Za signal $x_3(t)$ vrijedi:

$$\begin{aligned} x_3(t) &= \cos(4t) + \sin(4\pi t) \\ x_{3,1}(t) &= \cos(4t) \Rightarrow T_1 = \frac{\pi}{2} \\ x_{3,2}(t) &= \sin(4\pi t) \Rightarrow T_2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Za period signala $x_3(t)$ vrijedi:

$$\begin{aligned} & pT_1 = qT_2 \Rightarrow p\frac{\pi}{2} = q\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}, p = 1, q = \pi \\ & q \notin \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Budući da ne postoje cijeli brojevi p i q takvi da vrijedi $T = pT_1 = qT_2$, signal $x_3(t)$ je aperiodičan.

Primjer 2.5. Odredite parnost i neparnost sljedećih signala:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \left(t^2 + 1\right)\sin t \\ x_2(t) &= t\tan t \\ x_3(t) &= \left(t^3 + t\right)\cos t \\ x_4(t) &= |t|\cos t. \end{aligned}$$

Rješenje Signal je paran ako vrijedi:

$$x(-t) = x(t), \forall t, t \in \mathbf{R},$$

a neparan ako vrijedi:

$$x(-t) = -x(t), \forall t, t \in \mathbf{R}.$$

Ostali signali (a to je većina signala) nisu ni parni ni neparni i mogu se zapisati kao zbroj parnog i neparnog signala:

$$x(t) = x_p(t) + x_n(t).$$

Za osnovne trigonometrijske signale vrijedi:

- $\sin(-t) = -\sin(t)$ - neparan signal,
- $\cos(-t) = \cos(t)$ - paran signal.

Za umnožak parnih i neparnih signala vrijedi:

- paran $\times$ paran $=$ paran,
- neparan $\times$ neparan $=$ paran,
- neparan $\times$ paran $=$ neparan.

Signal $x_1(t)$ može se zapisati kao umnožak dvaju signala:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \left(t^2+1\right)\sin t = x_{1,1}(t)x_{1,2}(t) \\ x_{1,1}(t) &= t^2+1 \\ x_{1,2}(t) &= \sin t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{1,1}(t) &= t^2+1 \Rightarrow x_{1,1}(-t) = (-t)^2+1 = t^2+1 = x_{1,1}(t) \\ x_{1,2}(t) &= \sin t \Rightarrow x_{1,2}(-t) = \sin(-t) = -\sin t = -x_{1,2}(t). \end{aligned}$$

Signal $x_{1,1}(t)$ je paran, a signal $x_{1,2}(t)$ je neparan pa je umnožak ovih dvaju signala neparan signal.

Signal $x_2(t)$ može se zapisati kao umnožak triju signala:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= t\tan t = t\frac{\sin t}{\cos t} = x_{2,1}(t)x_{2,2}(t)x_{2,3}(t) \\ x_{2,1}(t) &= t \Rightarrow x_{2,1}(-t) = -t = -x_{2,1}(t) \\ x_{2,2}(t) &= \sin t \Rightarrow x_{2,2}(-t) = \sin(-t) = -\sin t = -x_{2,2}(t) \\ x_{2,3}(t) &= \frac{1}{\cos t} \Rightarrow x_{2,3}(-t) = \frac{1}{\cos(-t)} = \frac{1}{\cos t} = x_{2,3}(t). \end{aligned}$$

Signal $x_{2,1}(t)$ je neparan, signal $x_{2,2}(t)$ je neparan, a signal $x_{2,3}(t)$ je paran. Umnožak prva dva neparna signala je paran signal, a taj paran signal pomnožen s parnim signalom ponovno daje paran signal.

Signal $x_3(t)$ može se zapisati kao umnožak dvaju signala:

$$\begin{aligned} x_3(t) &= \left(t^3+t\right)\cos t = x_{3,1}(t)x_{3,2}(t) \\ x_{3,1}(t) &= t^3+t \Rightarrow x_{3,1}(-t) = (-t)^3 - t = -t^3 - t = -x_{3,1}(t) \\ x_{3,2}(t) &= \cos t \Rightarrow x_{3,2}(-t) = \cos(-t) = \cos t = x_{3,2}(t). \end{aligned}$$

Signal $x_{3,1}(t)$ je neparan, a signal $x_{3,2}(t)$ je paran pa je umnožak ovih dvaju signala neparan signal.

Signal $x_4(t)$ može se zapisati kao umnožak dvaju signala:

$$\begin{aligned}
&x_4(t) = |t| \cos t \\
&x_{4,1}(t) = |t| \Rightarrow x_{4,1}(-t) = |-t| = |t| = x_{4,1}(t) \\
&x_{4,2}(t) = \cos t \Rightarrow x_{4,2}(-t) = \cos(-t) = \cos t = x_{4,2}(t)
\end{aligned}$$

Oba signala su parna pa je i njihov umnožak paran signal. Prema tome, vrijedi:

- $x_1(t)$ je neparan signal,
- $x_2(t)$ je paran signal,
- $x_3(t)$ je neparan signal,
- $x_4(t)$ je paran signal.

Primjer 2.6. Sljedeće signale zapišite u obliku zbroja parnog i neparnog signala.

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= t^3 + 2t^2 + 3t + 4 \\
x_2(t) &= t^3 \sin t + t^2 \tan t \\
x_3(t) &= e^t \\
x_4(t) &= t^2 + \cos t.
\end{aligned}$$

Rješenje Svaki se signal može zapisati kao zbroj parnog i neparnog signala:

$$x(t) = x_p(t) + x_n(t).$$

Potrebno je naći obrnutu vezu, odnosno kako iz signala dobiti njegovu parnu i neparnu komponentu:

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_p(t) + x_n(t) & * \\
x(-t) &= x_p(-t) + x_n(-t) = x_p(t) - x_n(t). & **
\end{aligned}$$

Zbrojimo li izraz (*) i (**) dobit ćemo:

$$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}.$$

Ako se od izraza (*) oduzme izraz (**) dobit ćemo:

$$x_n(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}.$$

Rastavimo sada signal $x_1(t)$ na njegov parni i neparni signal:

$$x_1(t) = t^3 + 2t^2 + 3t + 4$$

$$x_{1,p}(t) = \frac{x_1(t) + x_1(-t)}{2} = \frac{t^3 + 2t^2 + 3t + 4 - t^3 + 2t^2 - 3t + 4}{2} = \frac{4t^2 + 8}{2} = 2t^2 + 4$$

$$x_{1,n}(t) = \frac{x_1(t) - x_1(-t)}{2} = \frac{t^3 + 2t^2 + 3t + 4 - (-t^3 + 2t^2 - 3t + 4)}{2} = \frac{2t^3 + 6t}{2} = t^3 + 3t.$$

Signal $x_2(t)$ rastavljen na njegov parni i neparni signal je:

$$
\begin{aligned}
&x_2(t) = t^3 \sin t + t^2 \tan t\\
&x_{2,p}(t) = \frac{x_1(t) + x_1(-t)}{2} = \frac{t^3 \sin t + t^2 \tan t + (-t)^3 \sin(-t) + (-t)^2 \tan(-t)}{2} =\\
&= \frac{t^3 \sin t + t^2 \tan t + t^3 \sin t - t^2 \tan t}{2} = \frac{2t^3 \sin t}{2} = t^3 \sin t\\
&x_{2,n}(t) = \frac{x_1(t) - x_1(-t)}{2} = \frac{t^3 \sin t + t^2 \tan t - \left((-t)^3 \sin(-t) + (-t)^2 \tan(-t)\right)}{2} =\\
&= \frac{t^3 \sin t + t^2 \tan t - t^3 \sin t + t^2 \tan t}{2} = \frac{2t^2 \tan t}{2} = t^2 \tan t.
\end{aligned}
$$

Signal $x_3(t)$ rastavljen na njegov parni i neparni signal je:

$$
\begin{aligned}
x_3(t) &= e^t\\
x_{3,p}(t) &= \frac{x_1(t) + x_1(-t)}{2} = \frac{e^t + e^{-t}}{2}\\
x_{3,n}(t) &= \frac{x_1(t) - x_1(-t)}{2} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.
\end{aligned}
$$

Dobiveni signali su hiperbolni signali za koje vrijedi:

$$
\begin{aligned}
x_{3,p}(t) &= \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t\\
x_{3,n}(t) &= \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh t.
\end{aligned}
$$

Parni signal eksponencijalnog signala e^t je kosinus hiperbolni ($\cosh t$), a neparni signal je sinus hiperbolni ($\sinh t$).

Signal $x_4(t)$ rastavljen na njegov parni i neparni signal je:

$$
\begin{aligned}
&x_4(t) = t^2 + \cos t\\
&x_{4,p}(t) = \frac{x_4(t) + x_4(-t)}{2} = \frac{t^2 + \cos t + (-t)^2 + \cos(-t)}{2} = \frac{t^2 + \cos t + t^2 + \cos t}{2} = t^2 + \cos t\\
&x_{4,n}(t) = \frac{x_4(t) - x_4(-t)}{2} = \frac{t^2 + \cos t - \left((-t)^2 + \cos(-t)\right)}{2} = \frac{t^2 + \cos t - t^2 - \cos t}{2} = 0.
\end{aligned}
$$

S obzirom da smo parni signal rastavili na zbroj parnog i neparnog signala, logično je da je neparni dio signala jednak nuli.

Primjer 2.7. Izračunajte sljedeće integrale:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt\\
I_2 &= \int_{-4.1}^{-0.5} x(t)dt\\
I_3 &= \int_{0.5}^{3.2} x(t)dt
\end{aligned}
$$

ako je:

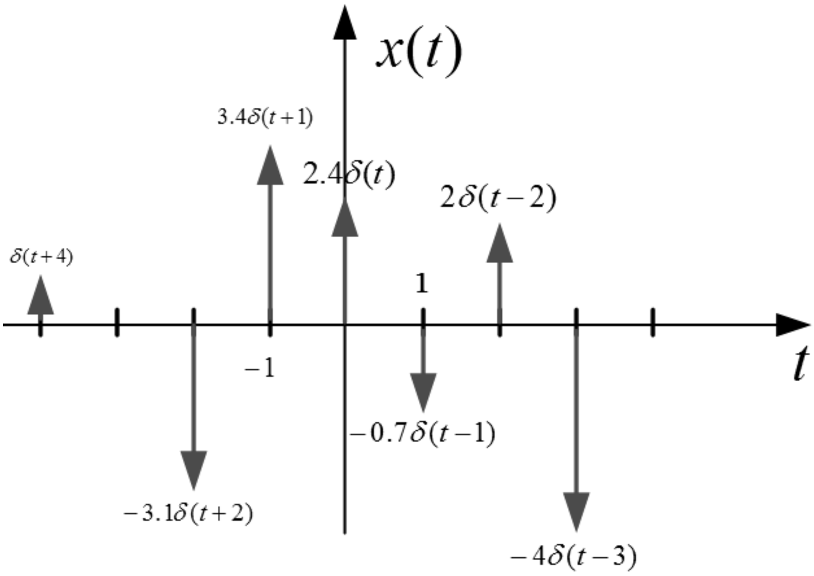
$$x(t) = \delta(t+4) - 3.1\delta(t+2) + 3.4\delta(t+1) + 2.4\delta(t) - 1.7\delta(t-1) + 2\delta(t-2) - 4\delta(t-3).$$

Nacrtajte signal $x(t)$.

Rješenje: Za *dirac* delta signal vrijedi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$

odnosno, površina ispod *dirac*ovog signala iznosi jedan.



Slika 2.5: Graf signala $x(t)$, primjer 2.7.

Prvi integral I_1 sumira težine svih *dirac* delta signala unutar signala $x(t)$:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \delta(t+4) - 3.1\delta(t+2) + 3.4\delta(t+1) + 2.4\delta(t) \\ -1.7\delta(t-1) + 2\delta(t-2) - 4\delta(t-3) \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+4)dt - 3.1 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+2)dt + 3.4 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+1)dt + 2.4 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt + ...$$

$$... + 1.7 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1)dt + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-2)dt - 4 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-3)dt =$$

$$= 1 - 3.1 + 3.4 + 2.4 - 1.7 + 2 - 4 = 0.$$

Drugi će integral sumirati težine samo onih *dirac* delta signala koji se nalaze unutar intervala [-4.1, -0.5]:

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-4.1}^{-0.5} x(t)dt\\
I_2 &= \int_{-4.1}^{-0.5} \left(\delta(t+4) - 3.1\delta(t+2) + 3.4\delta(t+1)\right) dt =\\
&= \int_{-4.1}^{-0.5} \delta(t+4)dt - 3.1 \int_{-4.1}^{-0.5} \delta(t+2)dt + 3.4 \int_{-4.1}^{-0.5} \delta(t+1)dt =\\
&= 1 - 3.1 + 3.4 = 1.3.
\end{aligned}
$$

Treći će integral sumirati težine samo onih *dirac* delta signala koji se nalaze unutar intervala [0.5, 3.2]:

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \int_{0.5}^{3.2} x(t)dt\\
I_3 &= \int_{0.5}^{3.2} \left(-1.7\delta(t-1) + 2\delta(t-2) - 4\delta(t-3)\right) dt =\\
&= 1.7 \int_{0.5}^{3.2} \delta(t-1)dt + 2 \int_{0.5}^{3.2} \delta(t-2)dt - 4 \int_{0.5}^{3.2} \delta(t-3)dt =\\
&= -1.7 + 2 - 4 = -3.7.
\end{aligned}
$$

Primjer 2.8. Koristeći Eulerovu formulu dokažite da vrijedi:

$$
\begin{aligned}
\cos(\omega t) &= \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\\
\sin(\omega t) &= \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}.
\end{aligned}
$$

Rješenje: Eulerova formula glasi:

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t).$$

Kada u eksponentu t zamijenimo s $-t$ dobije se:

$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t) - j\sin(\omega t).$$

Zbrojimo li ove dvije relacije, dobit ćemo:

$$
\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned} e^{j\omega t} &= \cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\\ e^{-j\omega t} &= \cos(\omega t) - j\sin(\omega t) \end{aligned}\right\} +\\
&e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} = 2\cos(\omega t) \;/ : 2\\
&\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}.
\end{aligned}
$$

Za kosinus signal pokazali smo da vrijedi jednakost zadana zadatkom. Oduzmemo li sada dvije navedene relacije Eulerove formule, dobit ćemo:

$$\left.\begin{aligned} e^{j\omega t} &= \cos(\omega t) + j\sin(\omega t) \\ e^{-j\omega t} &= \cos(\omega t) - j\sin(\omega t) \end{aligned}\right\} -$$

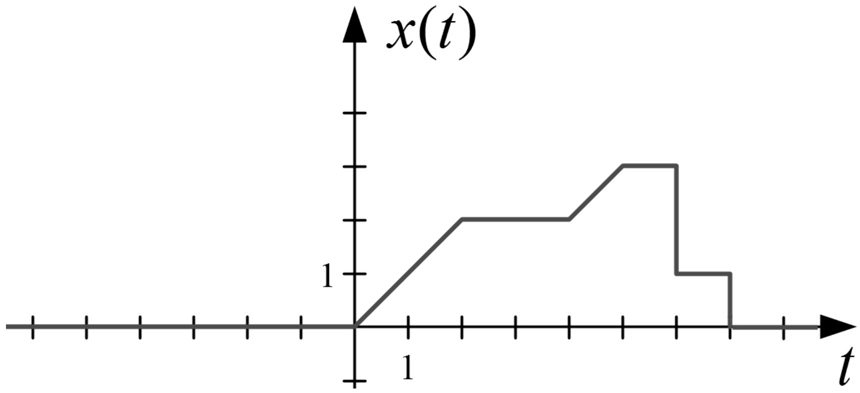
$$e^{j\omega t} - e^{-j\omega t} = 2j\sin(\omega t) \;/ : 2j$$

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}.$$

Ovime smo dokazali ono što se u zadatku tražilo.

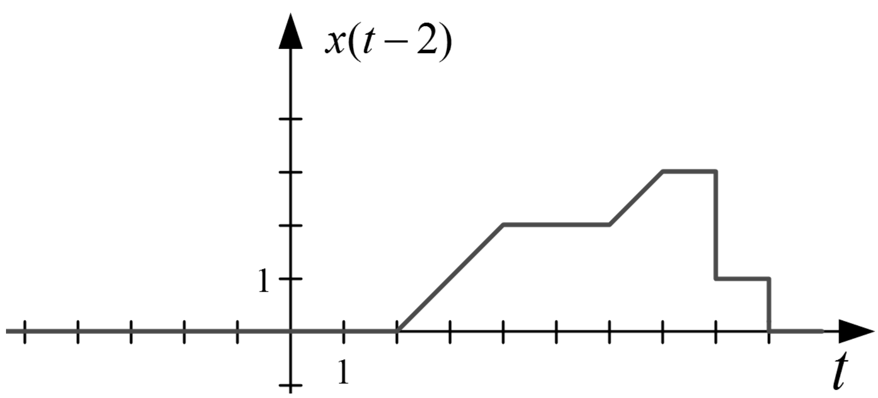
Primjer 2.9. Za signal na slici 2.6 napravite sljedeće vremenske transformacije:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x(t-2) \\ y_2(t) &= x(t+5) \\ y_3(t) &= x(2t) \\ y_4(t) &= x(-0.5t) \\ y_5(t) &= x(-t+3). \end{aligned}$$



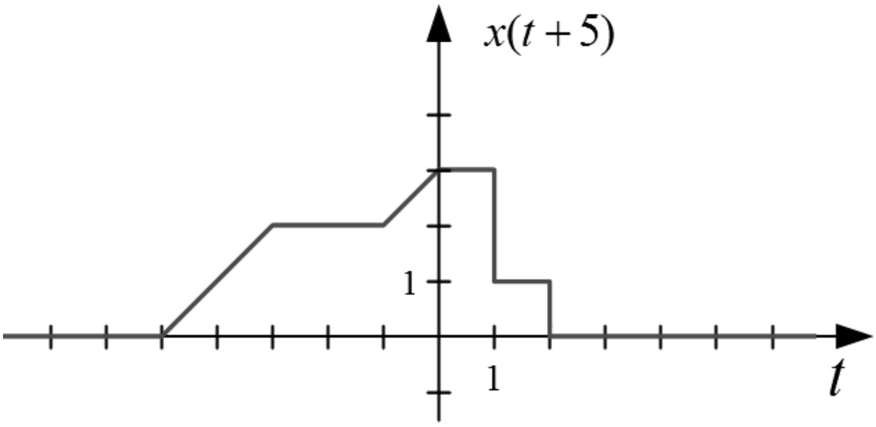
Slika 2.6: Graf signala $x(t)$, primjer 2.9.

Rješenje: Signal $y_1(t)$ dobije se kao pomak osnovnog signala $x(t)$ za dva u desno jer vrijedi da je pomak u desno definiran kao $x(t - t_0)$ ako je $t_0 > 0$ (u ovom slučaju $t_0 = 2$). Pomaknuti signal prikazan je na slici 2.7.

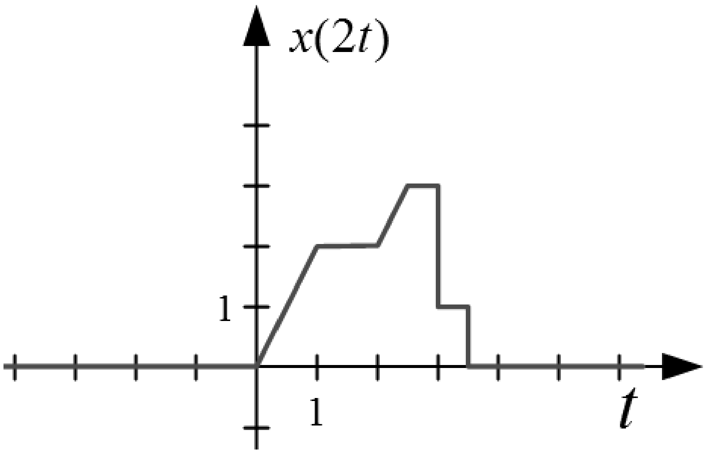


Slika 2.7: Graf signala $y_1(t) = x(t-2)$, primjer 2.9.

Signal $y_2(t)$ dobije se kao pomak osnovnog signala $x(t)$ za pet u lijevo jer vrijedi da je pomak u lijevo definiran kao $x(t+t_0)$ ako je $t_0 > 0$ (u ovom slučaju $t_0 = 5$). Pomaknuti signal prikazan je na slici 2.8.



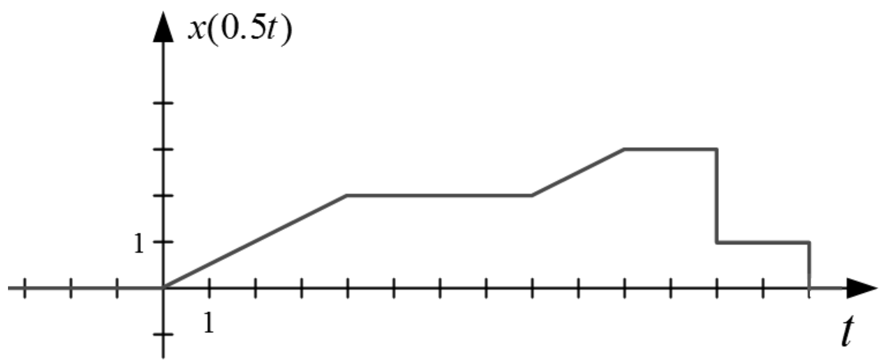
Slika 2.8: Graf signala $y_2(t) = x(t+5)$, primjer 2.9.



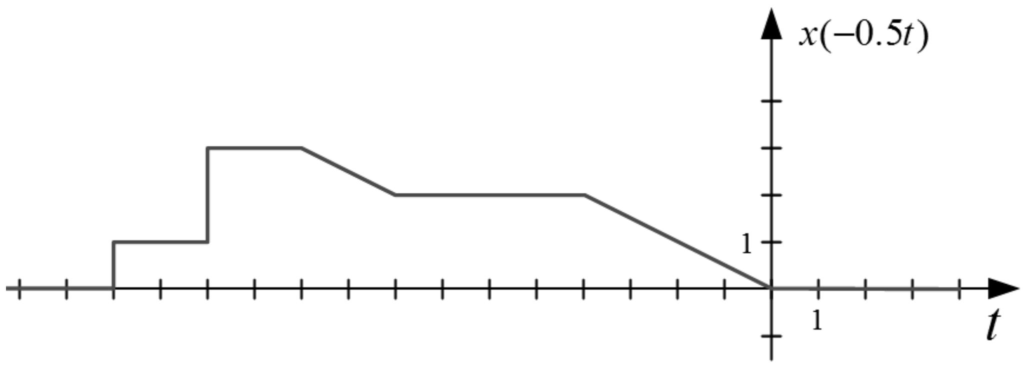
Slika 2.9: Graf signala $y_3(t) = x(2t)$, primjer 2.9.

Signal $y_3(t)$ dobije se skaliranjem signala $x(t)$. Za $y(t) = x(at)$ i $a > 0$ vrijedi da se signal sažima. Sažeti signal prikazan je na slici 2.9.

Signal $y_4(t)$ dobije se skaliranjem i zrcaljenjem signala $x(t)$. Za $y(t) = x(0.5t)$ vrijedi da se signal proširuje dva puta (slika 2.10). Nakon skaliranja provodi se zrcaljenje oko osi ordinata (slika 2.11).

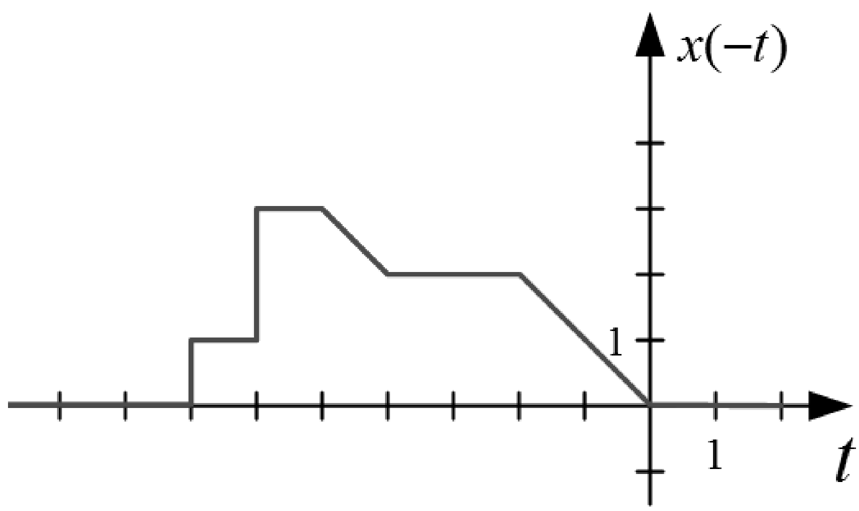


Slika 2.10: Graf signala $x(0.5t)$, primjer 2.9.

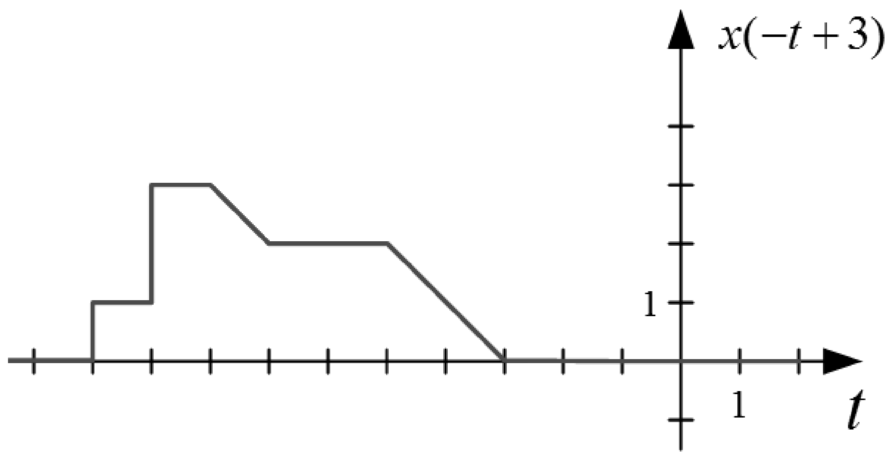


Slika 2.11: Graf signala $y_4(t) = x(-0.5t)$, primjer 2.9.

Signal $y_5(t)$ dobije se zrcaljenjem i pomakom signala $x(t)$. Za $y(t) = x(-t)$ vrijedi da se najprije zrcali (slika 2.12). Nakon zrcaljenja provodi se pomak ulijevo za tri (slika 2.15).



Slika 2.12: Graf signala $x(-t)$, primjer 2.9.

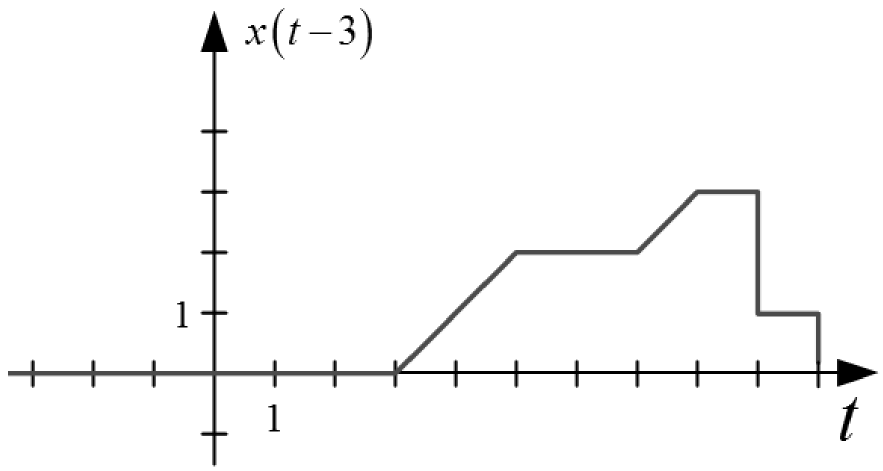


Slika 2.13: Graf signala $y_5(t) = x(-t+3)$, primjer 2.9.

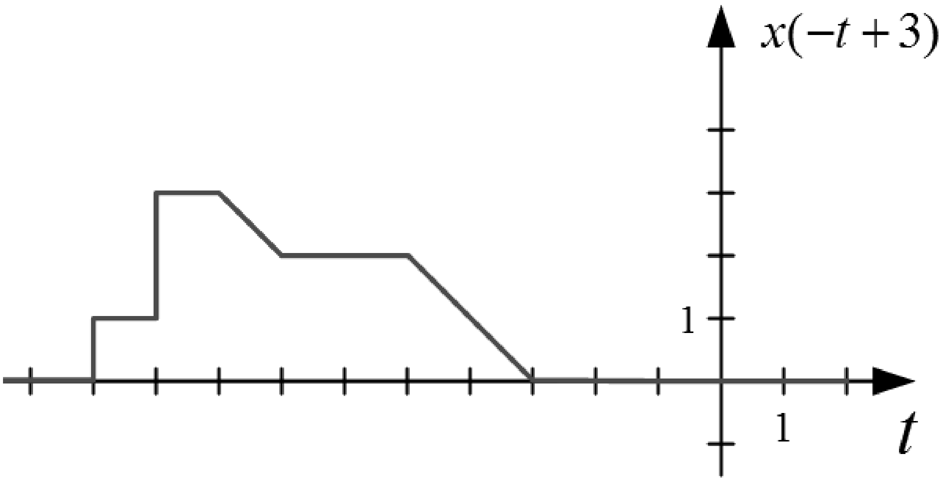
Postoji i drugi način za dobivanje signala $y_5(t)$. Za signal $y_5(t)$ vrijedi (izluči se minus (-)):

$$y_5(t) = x\left(-\left(t-3\right)\right)$$

Sada se najprije vrši pomak udesno za 3 (slika 2.14), a zatim zrcaljenje oko osi ordinata (slika 2.15). Preporučuje se rješavanje zadataka na ovaj način.

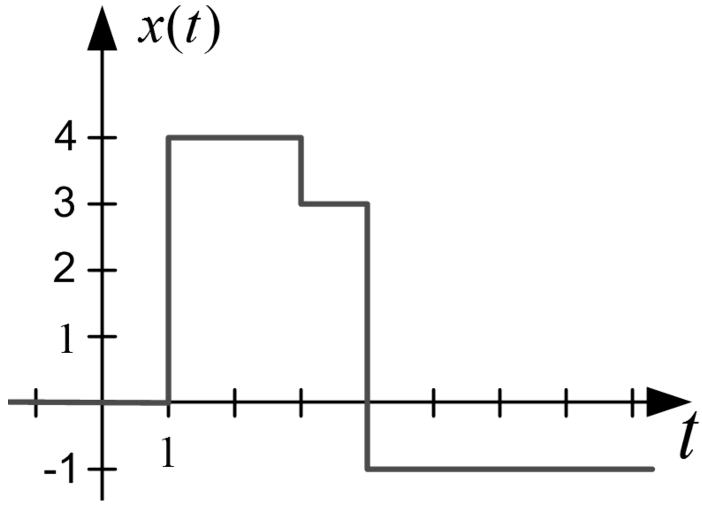


Slika 2.14: Graf signala $x(-(t-3))$, primjer 2.9.



Slika 2.15: Graf signala $y_5(t) = x(-t+3)$, primjer 2.9.

Primjer 2.10. Signal sa slike 2.16 izrazite linearnom kombinacijom jediničnih stepenica.



Slika 2.16: Graf signala $x(t)$, primjer 2.10.

Rješenje: Za jediničnu stepenicu vrijedi sljedeća definicija:

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & za \quad t \geqslant 0 \\ 0 & za \quad t < 0 \end{cases}$$

Povećanje amplitude i pomak jedinične stepenice izvodi se na sljedeći način (npr. pomak signala jednu sekundu udesno i povećanje amplitude četiri puta):

$$4\mu(t-1) = \begin{cases} 4 & za \quad t \geqslant 1 \\ 0 & za \quad t < 1 \end{cases}$$

Signal $x(t)$ sastoji se od nekoliko jediničnih stepenica koje su pomaknute i pojačane po amplitudi. Svaka nova stepenica počinje na mjestu prekida. Prva stepenica je

$4\mu(t-1)$ jer se u prvoj sekundi pojavljuje skok signala. Nakon toga, u trećoj sekundi dolazi do pada signala za jedan. S obzirom da je amplituda prethodnog signala bila četiri, potrebno je oduzeti od prethodne stepenice stepenicu pomaknutu udesno za tri sekunde s amplitudom jedan. Slijedeći ovu uputu dolazimo do rješenja:

$$x(t) = 4\mu(t-1) - \mu(t-3) - 4\mu(t-4)$$

2.1 Zadaci za vježbu

Zadatak 2.1. Nacrtajte kontinuirani vremenski signal:

$$x(t) = \begin{cases} t-1 & za \quad t \geq 0 \\ -2t-1 & za \quad t < 0 \end{cases}, t \in \mathbf{R}.$$

Zadatak 2.2. Nacrtajte diskretni vremenski signal:

$$x[k] = \begin{cases} k-1 & za \quad k \geq 0 \\ -2k-1 & za \quad k < 0 \end{cases}, k \in \mathbf{Z}.$$

Zadatak 2.3. Odredite osnovni period sljedećih vremenskih signala:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos(2.5t) \\ x_2(t) &= \sin(4\pi t) \\ x_3(t) &= \cot(3t) \\ x_4(t) &= 4\sin(2t)\cos(2t) \\ x_5(t) &= (t+1)\sin t. \end{aligned}$$

Zadatak 2.4. Provjerite periodičnost sljedećih signala. Za periodične signale odredite osnovni period.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos(5t) + \cos(2.5t) \\ x_2(t) &= \sin(\pi t) + \sin(2.1\pi t) \\ x_3(t) &= \cos(3t) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi t\right). \end{aligned}$$

Zadatak 2.5. Odredite parnost i neparnost sljedećih signala:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \left(t^2+1\right)\cos t \\ x_2(t) &= t^2 e^{-|t|} \\ x_3(t) &= \left(t^3+t\right)\sin t \\ x_4(t) &= |t|\, t. \end{aligned}$$

Zadatak 2.6. Sljedeće signale zapišite u obliku zbroja parnih i neparnih signala.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 3t^3 + 2t^2 + t \\ x_2(t) &= t^3 \cos t + t^2 \sin t \\ x_3(t) &= e^{-t} \\ x_4(t) &= t^5 + \sin t. \end{aligned}$$

Zadatak 2.7. Izračunajte sljedeće integrale:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt \\ I_2 &= \int_{-3.1}^{-0.5} x(t)dt \\ I_3 &= \int_{-0.1}^{3.2} x(t)dt. \end{aligned}$$

ako je:

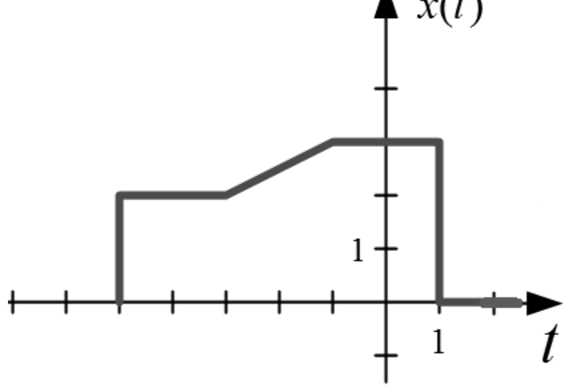
$$x(t) = 1.7\delta(t+4) + 2.13\delta(t+3) - 1.24\delta(t+1) - 4\delta(t) + 1.2\delta(t-1) + 2.5\delta(t-2) + 0.7\delta(t-3).$$

Nacrtajte signal $x(t)$.

Zadatak 2.8. Za signal na slici 2.17 napravite sljedeće vremenske transformacije:

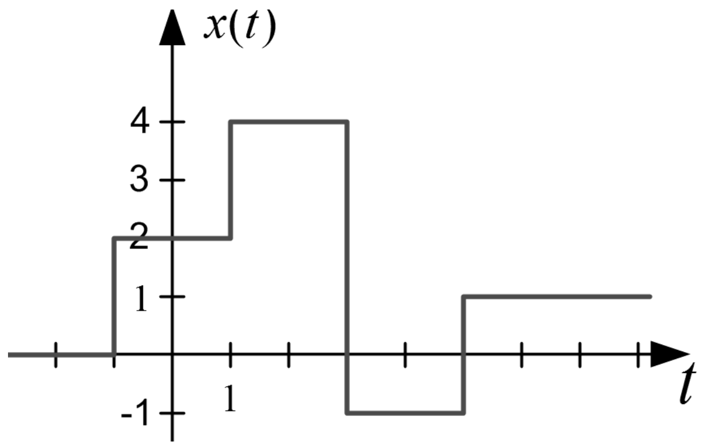
$$\begin{aligned} y_1(t) &= x(t-3) \\ y_2(t) &= x(t+4) \\ y_3(t) &= x(1.5t) \\ y_4(t) &= x(-1.5t) \\ y_5(t) &= x(-2t-6). \end{aligned}$$

Napomena za signal $y_5(t)$: Najprije izlučite koeficijent koji se nalazi uz nezavisnu vremensku varijablu t, (-2(t+3)). Sada je potrebno napraviti skaliranje s dva, nakon toga pomak ulijevo za 3, a na kraju se signal zrcali (zbog minusa).



Slika 2.17: Graf signala $x(t)$, zadatak 2.8.

Zadatak 2.9. Signal sa slike 2.18 izrazite linearnom kombinacijom jediničnih stepenica.



Slika 2.18: Graf signala $x(t)$, zadatak 2.9.

Poglavlje 3

Vrste sustava

Sustavi se mogu podijeliti s obzirom na:

- Zakonitosti vladanja:
  - Linearni sustavi,
  - Nelinearni sustavi.
- Ponašanje u vremenu:
  - Vremenski promjenjivi sustavi,
  - Vremenski nepromjenjivi sustavi.
- Signal u vremenu:
  - Kontinuirani sustavi,
  - Diskretni sustavi.
- Svojstva signala:
  - Deterministički sustavi,
  - Nedeterministički sustavi,
  - Stohastički sustavi.
- Parametre:
  - Sustavi s koncentriranim parametrima,
  - Sustavi s raspodijeljenim parametrima.
- Broj pobuda i odziva:
  - SISO sustavi (Single input, single output),
  - MIMO sustavi (Multiple input, multiple output).
- Memoriju:
  - Sustavi s memorijom,
  - Sustavi bez memorije.

- Kauzalnost:
  - Kauzalni sustavi,
  - Nekauzalni sustavi.

U nastavku ćemo opisati samo najbitnija svojstva.

Sustav je **linearan** ako se na njega može primijeniti načelo superpozicije. Neka je $x(t)$ ulaz u sustav $S(\cdot)$, a $y(t)$ izlaz iz sustava. Za linearan sustav i proizvoljne konstante α i β vrijedi:

$$S\left(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\right) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \tag{3.1}$$

Za sustav koji je opisan linearnim diferencijalnim jednadžbama (više o tome u poglavlju 4) vrijedi da je linearan ako ima konstantne parametre (parametri su težinski članovi koji stoje uz vremenske derivacije ulaza i izlaza sustava).

Sustav je **nelinearan** ako nije linearan.

Sustav je **vremenski nepromjenjiv** ako ne mijenja svoja svojstva (ako su mu parametri vremenski nepromjenjivi) tijekom vremena t. Ako je ulaz u sustav $S(\cdot)$ $x(t)$, a izlaz iz sustava $y(t)$, tada za vremenski nepromjenjiv sustav vrijedi ako je $y(t) = S(x(t))$ onda je $y(t - t_0) = S(x(t - t_0))$.

Kontinuirani sustavi su sustavi u kojima su sve varijable stanja kontinuirane (kontinuirano se mijenjaju s vremenom). Ovakve sustave moguće je opisati diferencijalnim jednadžbama (linearnim i nelinearnim).

Diskretni sustavi su sustavi u kojima su sve varijable stanja diskretne (mijenjaju se u diskretnim vremenskim trenucima). Ovakve sustave moguće je opisati diferencijskim jednadžbama (linearnim i nelinearnim).

Deterministički sustavi su sustavi u kojima nema neizvjesnosti pri kreiranju budućih stanja sustava. Deterministički sustav uvijek će proizvesti isti odziv na neku pobudu $u(t)$ ako je početno stanje sustava uvijek isto. Kažemo da kod determinističkog sustava izlaz možemo predvidjeti sa stopostotnom sigurnošću.

Stohastički sustavi (češće stohastički ili slučajni procesi) su sustavi kod kojih postoji neodređenost u kreiranju budućih stanja sustava koji su opisani funkcijama razdiobe. To znači, ako je poznato početno stanje sustava, postoje mnoge trajektorije kojima sustav može ići iz nekog početnog stanja u konačno pri čemu su neke trajektorije više vjerojatne, a druge manje vjerojatne.

Nedeterministički sustavi su sustavi u kojima postoji izvjesnost u kreiranju budućih stanja sustava. Nedeterministički sustav neće uvijek proizvesti isti odziv na neku pobudu $u(t)$ ako je početno stanje sustava uvijek isto. Kažemo da kod nedeterminističkog sustava ne možemo predvidjeti izlaz.

Primjer 3.1. Odredite linearnost sljedećih sustava:

1. $y(t) = 3x(t)$
2. $y(t) = \ln\left(x(t)\right)$
3. $y(t) = x^2(t)$
4. $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} 5x(t)dt$.

Rješenje: Da bi sustav bio linearan mora vrijediti:

$$S\left(\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)\right)=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t).$$

Prema tome, umjesto $x(t)$ potrebno je uvrstiti $\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$ i dobiti $\alpha y_1(t)+\beta y_2(t)$ da bi sustav bio linearan.

Za prvi sustav vrijedi:

$$y(t)=3x(t)\Rightarrow 3\left(\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)\right)=3\alpha x_1(t)+3\beta x_2(t)=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t).$$

Sustav je linearan.

Za drugi sustav vrijedi:

$$y(t)=\ln\left(x(t)\right)\Rightarrow \ln\left(\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)\right)\neq \alpha\ln\left(x_1(t)\right)+\beta\ln\left(x_2(t)\right)=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t).$$

Sustav nije linearan, nelinearan je. Za treći sustav vrijedi:

$$\begin{aligned}&y(t)=x^2(t)\Rightarrow\left(\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)\right)^2=\alpha^2{x_1}^2(t)+2\alpha\beta x_2(t)x_2(t)+\beta^2{x_2}^2(t)\neq\\&\neq\alpha^2{x_1}^2(t)+\beta^2{x_2}^2(t)=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t).\end{aligned}$$

Sustav nije linearan, nelinearan je. Za četvrti sustav vrijedi:

$$\begin{aligned}y(t)&=\int_{-\infty}^{\infty}5\left(\alpha x_1(t)+\beta x_2(t)\right)dt\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}5\alpha x_1(t)dt+\int_{-\infty}^{\infty}5\beta x_2(t)dt=\\&=\alpha\int_{-\infty}^{\infty}5x_1(t)dt+\beta\int_{-\infty}^{\infty}5x_2(t)dt=\alpha y_1(t)+\beta y_2(t).\end{aligned}$$

Sustav je linearan.

Primjer 3.2. Odredite koji je sustav vremenski promjenjiv, a koji vremenski nepromjenjiv:

1. $y(t)=e^{x(t)}+\sin\left(x(t)\right)$
2. $y(t)=e^{tx(t)}$.

Rješenje: Najprije se umjesto $x(t)$ uvrsti $x(t-t_0)$, a zatim se provjeri da li je to jednako $y(t-t_0)$. Za prvi sustav vrijedi:

$$y(t)=e^{x(t)}+\sin\left(x(t)\right)\Rightarrow e^{x(t-t_0)}+\sin\left(x(t-t_0)\right)=y(t-t_0).$$

Sustav je vremenski nepromjenjiv. Za drugi sustav vrijedi:

$$y(t)=e^{tx(t)}\Rightarrow e^{tx(t-t_0)}\neq e^{(t-t_0)x(t-t_0)}=y(t-t_0).$$

Sustav je vremenski promjenjiv.

3.1 Zadaci za vježbu

Zadatak 3.1. Odredite linearnost sljedećih sustava:

1. $y(t) = 7x(t)$
2. $y(t) = \sin(x(t))$
3. $y(t) = x^3(t)$
4. $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.

Zadatak 3.2. Odredite koji je sustav vremenski promjenjiv, a koji vremenski nepromjenjiv:

1. $y(t) = e^{x(t)} + \cos(x^2(t))$
2. $y(t) = te^{x(t)}$.

Poglavlje 4

Linearne diferencijalne jednadžbe

4.1 Homogene linearne diferencijalne jednadžbe

Sustavi koje ćemo opisivati linearnim diferencijalnim jednadžbama (u nastavku LDJ) su kontinuirani linearni i vremenski nepromjenjivi sustavi (LTI Linear Time – Invariant Systems).

Opća LDJ ima oblik:

$$a_n y^{(n)}(t) + ... + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + ... + b_1 u'(t) + b_0 u(t) \tag{4.1}$$

gdje su:

- $a_n, a_{n-1}, ..., a_0, b_m, b_{m-1}, ..., b_o$ konstantni parametri LDJ,
- n je red LDJ, $n \geq m$.

Desnu stranu izraza (4.1) označimo s $f(t)$:

$$f(t) = b_m u^{(m)}(t) + ... + b_1 u'(t) + b_0 u(t). \tag{4.2}$$

Totalni odziv sustava opisanog LDJ zbroj je homogenog $y_h(t)$ i partikularnog $y_p(t)$ rješenja:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t). \tag{4.3}$$

LDJ za koju vrijedi $f(t) = 0$ naziva se homogena diferencijalna jednadžba (4.4):

$$a_n y^{(n)}(t) + ... + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0. \tag{4.4}$$

Homogena LDJ nema partikularnog rješenja ($y_p(t) = 0$). Za homogenu LDJ pretpostavljamo homogeno rješenje:

$$y_h(t) = Ce^{\lambda t}. \tag{4.5}$$

koje uvrstimo u LDJ (4.4) te izračunamo karakteristične vrijednosti (korijene) LDJ (sustava):

$$\begin{aligned}
&a_n y^{(n)}(t) + ... + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = 0 \\
&a_n \left(Ce^{\lambda t}\right)^{(n)} + ... + a_2 \left(Ce^{\lambda t}\right)'' + a_1 \left(Ce^{\lambda t}\right)' + a_0 Ce^{\lambda t} = 0 \\
&a_n \lambda^n Ce^{\lambda t} + ... + a_2 \lambda^2 Ce^{\lambda t} + a_1 \lambda Ce^{\lambda t} + a_0 Ce^{\lambda t} = 0 \\
&\left(a_n \lambda^n + ... + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0\right) Ce^{\lambda t} = 0 \\
&a_n \lambda^n + ... + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Homogena rješenja LDJ ovise o karakterističnim vrijednostima LDJ:

$$a_n\lambda^n + ... + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{4.7}$$

- Ako su korijeni realni i različiti, pretpostavljeno homogeno rješenje je:

$$\begin{aligned} y_h(t) &= \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t} \\ y_h(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + ... + C_n e^{\lambda_n t}. \end{aligned}$$

- Ako su korijeni realni i višestruki, pretpostavljeno homogeno rješenje je:

$$\begin{aligned} y_h(t) &= \left(C_1 + C_2 t + ... + C_k t^{k-1}\right) e^{\lambda_1 t} + \sum_{i=k+1}^{n} C_i e^{\lambda_i t} \\ y_h(t) &= \left(C_1 + C_2 t + ... + C_k t^{k-1}\right) e^{\lambda_1 t} + C_{k+1} e^{\lambda_{k+1} t} + ... + C_n e^{\lambda_n t}. \end{aligned}$$

- Ako su korijeni konjugirano kompleksni, pretpostavljeno homogeno rješenje je:

$$\begin{aligned} y_h(t) &= e^{\sigma t}\left(C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)\right) + \sum_{i=3}^{n} C_i e^{\lambda_i t} \\ y_h(t) &= e^{\sigma t}\left(C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)\right) + C_3 e^{\lambda_3 t} + ... + C_n e^{\lambda_n t}. \end{aligned}$$

Nakon što pronađemo homogeno rješenje LDJ nepoznate koeficijente $C_1, C_2, C_3, ..., C_n$ izračunamo na temelju početnih uvjeta:

$$y(0), y'(0), y''(0), ..., y^{(n-1)}(0). \tag{4.8}$$

Početne uvjete uvrstimo u sljedeći set jednadžbi (ukoliko su korijeni jednostruki i realni):

$$\begin{aligned} & y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + ... + C_n e^{\lambda_n t} \\ & y'(t) = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} + ... + C_n \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ & . \\ & . \\ & . \\ & y^{(n-1)}(t) = C_1 {\lambda_1}^{n-1} e^{\lambda_1 t} + C_2 {\lambda_2}^{n-1} e^{\lambda_2 t} + ... + C_n {\lambda_n}^{n-1} e^{\lambda_n t}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Uvrstimo li $t = 0$ u relaciju (4.9) dobit ćemo n jednadžbi s n nepoznanica (koeficijenata $C_1, C_2, C_3, ..., C_n$):

$$\begin{aligned} & y(0) = C_1 + C_2 + ... + C_n \\ & y'(0) = C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 + ... + C_n \lambda_n \\ & . \\ & . \\ & . \\ & y^{(n-1)}(0) = C_1 {\lambda_1}^{n-1} + C_2 {\lambda_2}^{n-1} + ... + C_n {\lambda_n}^{n-1}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Primjer 4.1.1. Sustav je opisan homogenom diferencijalnom jednadžbom (nepobuđen sustav):

$$y''(t) + 2y'(t) + 0.75y(t) = 0.$$

Početni uvjeti su: $y'(0) = 1.2$, $y(0) = 2.3$. Odredite rješenje homogene linearne diferencijalne jednadžbe (homogeni odziv sustava).

Rješenje: Pretpostavljamo homogeno rješenje $y_h(t) = Ce^{\lambda t}$. Pretpostavljeno rješenje uvrstimo u homogenu diferencijalnu jednadžbu te se tako dobije karakteristična jednadžba:

$$\begin{aligned}
&{y_h}''(t) + 2{y_h}'(t) + 0.75y_h(t) = 0\\
&y_h(t) = Ce^{\lambda t}\\
&{y_h}'(t) = \lambda Ce^{\lambda t}\\
&{y_h}''(t) = \lambda^2 Ce^{\lambda t}\\
&\lambda^2 Ce^{\lambda t} + 2\lambda Ce^{\lambda t} + 0.75Ce^{\lambda t} = 0\\
&Ce^{\lambda t}\left(\lambda^2 + 2\lambda + 0.75\right) = 0\\
&\lambda^2 + 2\lambda + 0.75 = 0.
\end{aligned}$$

Rješenjem karakteristične jednadžbe možemo izračunati korijene karakteristične jednadžbe te dobiti opće rješenje homogene jednadžbe:

$$\begin{aligned}
&\lambda^2 + 2\lambda + 0.75 = 0\\
&\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-3}}{2} = \frac{-2 \pm 1}{2}\\
&\lambda_1 = -1.5, \lambda_2 = -0.5.
\end{aligned}$$

Korijeni karakteristične jednadžbe su realni i različiti pa prema tome pretpostavljamo sljedeće homogeno rješenje:

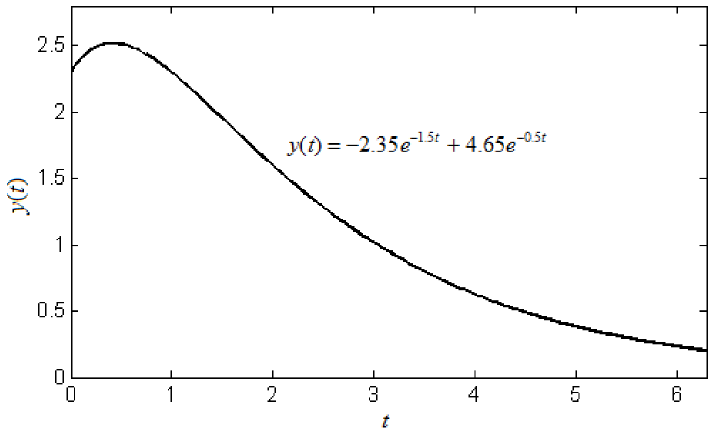
$$\begin{aligned}
&y_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}\\
&y(t) = y_h(t) = C_1 e^{-1.5t} + C_2 e^{-0.5t}.
\end{aligned}$$

U opće homogeno rješenje i u derivaciju općeg homogenog rješenja uvrstimo $t = 0$ te izračunamo koeficijente C_1, C_2:

$$\begin{aligned}
&y(t) = C_1 e^{-1.5t} + C_2 e^{-0.5t}\\
&y'(t) = -1.5C_1 e^{-1.5t} - 0.5C_2 e^{-0.5t}\\
&y(0) = C_1 + C_2 = 2.3\\
&y'(0) = -1.5C_1 - 0.5C_2 = 1.2 / \cdot 2\\
&C_1 + C_2 = 2.3\\
&\underline{-3C_1 - C_2 = 2.4}\\
&-2C_1 = 4.7\\
&C_1 = -2.35\\
&C_2 = 2.3 - C_2 = 4.65.
\end{aligned}$$

Rješenje homogene diferencijalne jednadžbe $y''(t) + 2y'(t) + 0.75y(t) = 0$ je (slika 4.1):

$$y(t) = -2.35e^{-1.5t} + 4.65e^{-0.5t}, t \geqslant 0.$$



Slika 4.1: Rješenje homogene diferencijalne jednadžbe $y''(t) + 2y'(t) + 0.75y(t) = 0$, početni uvjeti: $y'(0) = 1.2$, $y(0) = 2.3$.

Primjer 4.1.2. Sustav je opisan homogenom diferencijalnom jednadžbom (nepobuđen sustav):

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0.$$

Početni uvjeti su: $y'(0) = -1$, $y(0) = 1$. Odredite rješenje homogene linearne diferencijalne jednadžbe (homogeni odziv sustava).

Rješenje: Pretpostavljamo homogeno rješenje $y_h(t) = Ce^{\lambda t}$. Pretpostavljeno rješenje uvrstimo u homogenu diferencijalnu jednadžbu te dobijemo karakteristična jednadžba:

$$\begin{aligned}
&{y_h}''(t) + 2{y_h}'(t) + 5y_h(t) = 0\\
&y_h(t) = Ce^{\lambda t}\\
&{y_h}'(t) = \lambda Ce^{\lambda t}\\
&{y_h}''(t) = \lambda^2 Ce^{\lambda t}\\
&\lambda^2 Ce^{\lambda t} + 2\lambda Ce^{\lambda t} + 5Ce^{\lambda t} = 0\\
&Ce^{\lambda t}\left(\lambda^2 + 2\lambda + 5\right) = 0\\
&\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0.
\end{aligned}$$

Rješenjem karakteristične jednadžbe možemo izračunati korijene karakteristične jednadžbe te dobiti opće rješenje homogene jednadžbe:

$$\begin{aligned}
&\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0\\
&\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm j4}{2}\\
&\lambda_{1,2} = -1 \pm j2 = \sigma \pm j\omega.
\end{aligned}$$

Korijeni karakteristične jednadžbe su konjugirano kompleksni pa prema tome pretpostavljamo sljedeće homogeno rješenje:

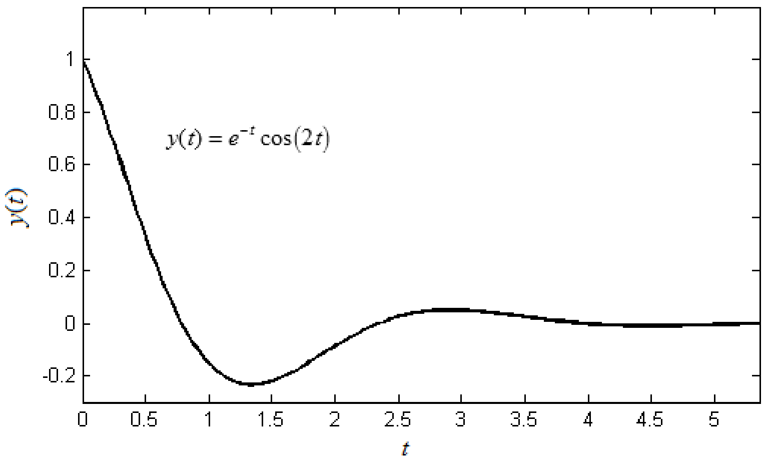
$$\begin{aligned} y_h(t) &= e^{\sigma t}\left(C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)\right) \\ y(t) = y_h(t) &= e^{-t}\left(C_1 \sin(2t) + C_2 \cos(2t)\right). \end{aligned}$$

U opće homogeno rješenje i u derivaciju općeg homogenog rješenja uvrstimo $t = 0$ te izračunamo koeficijente C_1, C_2:

$$\begin{aligned} &y(t) = e^{-t}\left(C_1 \sin(2t) + C_2 \cos(2t)\right) \\ &y'(t) = -e^{-t}\left(C_1 \sin(2t) + C_2 \cos(2t)\right) + e^{-t}\left(C_1 2\cos(2t) - 2C_2 \sin(2t)\right) \\ &y(0) = C_2 = 1 \\ &y'(0) = -C_2 + 2C_1 = -1 \\ &C_1 = 0. \end{aligned}$$

Rješenje homogene diferencijalne jednadžbe $y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 0$ je (slika 4.2):

$$y(t) = e^{-t}\cos(2t), t \geqslant 0.$$



Slika 4.2: Rješenje homogene diferencijalne jednadžbe $y''(t)+2y'(t)+5y(t) = 0$, početni uvjeti: $y'(0) = -1$, $y(0) = 1$.

Primjer 4.1.3. Sustav je opisan homogenom diferencijalnom jednadžbom (nepobuđen sustav):

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0.$$

Početni uvjeti su: $y'(0) = 0$, $y(0) = 1$. Odredite rješenje homogene linearne diferencijalne jednadžbe (homogeni odziv sustava).

Rješenje: Pretpostavljamo homogeno rješenje $y_h(t) = Ce^{\lambda t}$. Pretpostavljeno rješenje uvrstimo u homogenu diferencijalnu jednadžbu te se tako dobije karakteristična jednadžba:

$$
\begin{aligned}
&y_h''(t) + 4{y_h}'(t) + 4y_h(t) = 0 \\
&y_h(t) = Ce^{\lambda t} \\
&{y_h}'(t) = \lambda Ce^{\lambda t} \\
&{y_h}''(t) = \lambda^2 Ce^{\lambda t} \\
&\lambda^2 Ce^{\lambda t} + 4\lambda Ce^{\lambda t} + 2Ce^{\lambda t} = 0 \\
&Ce^{\lambda t}\left(\lambda^2 + 4\lambda + 4\right) = 0 \\
&\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.
\end{aligned}
$$

Rješenjem karakteristične jednadžbe možemo izračunati korijene karakteristične jednadžbe te dobiti opće rješenje homogene jednadžbe:

$$
\begin{aligned}
&\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \\
&\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = -2 \\
&\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -2.
\end{aligned}
$$

Korijeni karakteristične jednadžbe su dvostruki pa prema tome pretpostavljamo sljedeće homogeno rješenje:

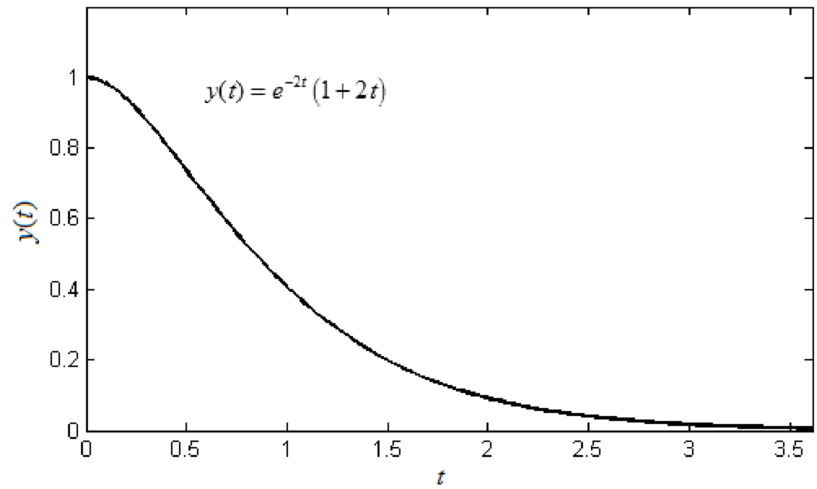
$$
\begin{aligned}
&y_h(t) = e^{\lambda_1 t}\left(C_1 + C_2 t\right) \\
&y(t) = y_h(t) = e^{-2t}\left(C_1 + C_2 t\right).
\end{aligned}
$$

U opće homogeno rješenje i u derivaciju općeg homogenog rješenja uvrstimo $t = 0$ te se izračunaju koeficijenti C_1, C_2:

$$
\begin{aligned}
&y(t) = e^{-2t}\left(C_1 + C_2 t\right) \\
&y'(t) = -2e^{-2t}\left(C_1 + C_2 t\right) + e^{-2t} C_2 \\
&y(0) = C_1 = 1 \\
&y'(0) = -2C_1 + C_2 = 0 \\
&C_2 = 2C_1 = 2.
\end{aligned}
$$

Rješenje homogene diferencijalne jednadžbe $y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 0$ je (slika 4.3):

$$
y(t) = e^{-2t}\left(1 + 2t\right), t \geqslant 0.
$$



Slika 4.3: Rješenje homogene diferencijalne jednadžbe $y''(t)+4y'(t)+4y(t)=0$, početni uvjeti: $y'(0)=0$, $y(0)=1$.

4.1.1 Zadaci za vježbu

Zadatak 4.1.1. Sustav je opisan homogenom diferencijalnom jednadžbom (nepobuđen sustav):

$$y''(t)+2.25y'(t)+1.25y(t)=0$$

Početni uvjeti su: $y'(0)=-1$, $y(0)=1$. Odredite rješenje homogene linearne diferencijalne jednadžbe (homogeni odziv sustava).

Zadatak 4.1.2. Sustav je opisan homogenom diferencijalnom jednadžbom (nepobuđen sustav):

$$y''(t)+y'(t)+4y(t)=0$$

Početni uvjeti su: $y'(0)=1$, $y(0)=1$. Odredite rješenje homogene linearne diferencijalne jednadžbe (homogeni odziv sustava).

Zadatak 4.1.3. Sustav je opisan homogenom diferencijalnom jednadžbom (nepobuđen sustav):

$$y''(t)+6y'(t)+9y(t)=0$$

Početni uvjeti su: $y'(0)=0$, $y(0)=-1$. Odredite rješenje homogene linearne diferencijalne jednadžbe (homogeni odziv sustava).

4.2 Nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe

Opća LDJ ima oblik:

$$a_n y^{(n)}(t)+...+a_2y''(t)+a_1y'(t)+a_0y(t)=b_m u^{(m)}(t)+...+b_1u'(t)+b_0u(t). \quad (4.11)$$

gdje su:

- $a_n, a_{n-1}, ..., a_0, b_m, b_{m-1}, ..., b_o$ konstantni parametri LDJ,
- n je red LDJ, $n \geq m$.

Desnu stranu izraza (4.11) označimo s $f(t)$:

$$f(t) = b_m u^{(m)}(t) + ... + b_1 u'(t) + b_0 u(t). \tag{4.12}$$

Totalni odziv sustava opisanog LDJ je zbroj homogenog $y_h(t)$ i partikularnog $y_p(t)$ rješenja:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t). \tag{4.13}$$

LDJ za koju vrijedi $f(t) \neq 0$ naziva se nehomogena diferencijalna jednadžba (4.14):

$$a_n y^{(n)}(t) + ... + a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t). \tag{4.14}$$

Partikularna rješenja sustava ovise o funkciji $f(t)$.

- Za funkciju $f(t)$ oblika:

  $$f(t) = B_0 + B_1 t + ... + B_M t^M,$$

  pretpostavljeno partikularno rješenje je:

  $$y_p(t) = K_0 + K_1 t + ... + K_M t^M.$$

- Za funkciju $f(t)$ oblika:

  $$f(t) = B,$$

  pretpostavljeno partikularno rješenje je:

  $$y_p(t) = K.$$

- Za funkciju $f(t)$ oblika:

  $$f(t) = Be^{at}, a \neq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n,$$

  pretpostavljeno partikularno rješenje je:

  $$y_p(t) = Ke^{at}.$$

- Za funkciju $f(t)$ oblika:

  $$f(t) = Be^{at}, a = \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k, a \neq \lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, ..., \lambda_n,$$

  pretpostavljeno partikularno rješenje je:

  $$y_p(t) = Kt^k e^{at}.$$

- Za funkciju $f(t)$ oblika:

$$f(t) = Be^{at}t^M, a \neq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n,$$

pretpostavljeno partikularno rješenje je:

$$y_p(t) = e^{at}\left(K_0 + K_1 t + ... + K_M t^M\right).$$

- Za funkciju $f(t)$ oblika:

$$f(t) = B\cos\omega_0 t,$$

pretpostavljeno partikularno rješenje je:

$$y_p(t) = K_1\cos\omega_0 t + K_2\sin\omega_0 t.$$

- Za funkciju $f(t)$ oblika:

$$f(t) = B\sin\omega_0 t,$$

pretpostavljeno partikularno rješenje je:

$$y_p(t) = K_1\cos\omega_0 t + K_2\sin\omega_0 t.$$

Pretpostavljeno partikularno rješenje $y_p(t) = K_1\cos\omega_0 t + K_2\sin\omega_0 t$ može se zapisati u obliku:

$$y_p(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi) = A\cos(\varphi)\sin(\omega_0 t) + A\sin(\varphi)\cos(\omega_0 t), \tag{4.15}$$

gdje je A amplituda, a φ fazni pomak partikularnog rješenja $y_p(t)$ u odnosu na funkciju $f(t)$. Amplituda i fazni pomak mogu se izračunati pomoću sljedećih relacija:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{K_1^2 + K_2^2} \\ \varphi &= \tan^{-1}\tfrac{K_1}{K_2}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Ako je funkcija $f(t)$ linearna kombinacija navedenih oblika funkcija, tada će pretpostavljeno partikularno rješenje biti linearna kombinacija navedenih oblika partikularnih rješenja.

- Za funkciju $f(t)$ oblika:

$$f(t) = A + Be^{at}, a \neq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n$$

pretpostavljeno partikularno rješenje je:

$$y_p(t) = K_1 + K_2 e^{at}$$

- Za funkciju $f(t)$ oblika:

$$f(t) = A + B\sin\omega_0 t.$$

pretpostavljeno partikularno rješenje je:

$$y_p(t) = K_1 + K_2\cos\omega_0 t + K_3\sin\omega_0 t.$$

- Za funkciju $f(t)$ oblika:

$$f(t) = At + Be^{at}, a \neq \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_n$$

pretpostavljeno partikularno rješenje je:

$$y_p(t) = K_1 + K_2 t + K_3 e^{at}.$$

- Za funkciju $f(t)$ oblika:

$$f(t) = At + B \sin \omega_0 t$$

pretpostavljeno partikularno rješenje je:

$$y_p(t) = K_1 + K_2 t + K_3 \cos \omega_0 t + K_4 \sin \omega_0 t.$$

Nakon što odredimo partikularno rješenje $y_p(t)$, potrebno je riješiti homogenu LDJ tako da postavimo $f(t) = 0$. Nepoznate koeficijente $C_1, C_2, C_3, ..., C_n$ računamo na temelju početnih uvjeta:

$$y(0), y'(0), y''(0), ..., y^{(n-1)}(0). \tag{4.17}$$

Početne uvjete uvrstimo u totalni odziv (4.13):

$$\begin{aligned} y(t) &= y_h(t) + y_p(t) \\ y'(t) &= {y_h}'(t) + {y_p}'(t) \\ &. \\ &. \\ &. \\ y^{(n-1)}(t) &= {y_h}^{(n-1)}(t) + {y_p}^{(n-1)}(t). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Uvrstimo li $t = 0$ u relaciju (4.18) dobije se n jednadžbi s n nepoznanica (koeficijenata $C_1, C_2, C_3, ..., C_n$):

$$\begin{aligned} y(0) &= y_h(0) + y_p(0) \\ y'(0) &= {y_h}'(0) + {y_p}'(0) \\ &. \\ &. \\ &. \\ y^{(n-1)}(0) &= {y_h}^{(n-1)}(0) + {y_p}^{(n-1)}(0). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Primjer 4.2.1. Sustav je opisan nehomogenom diferencijalnom jednadžbom:

$$y''(t) + 0.3y'(t) + 0.02y(t) = 12, t \geq 0.$$

Početni uvjeti su: $y'(0) = 0$, $y(0) = 0$. Odredite rješenje nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe (totalni odziv sustava).

Rješenje: Totalni odziv sustava jednak je zbroju homogenog rješenja sustava i partikularnog rješenja:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

Prvo ćemo riješiti opću homogenu jednadžbu ($f(t) = 0$), zatim pronaći partikularno rješenje te ćemo na temelju totalnog odziva i početnih uvjeta odrediti koeficijente C_1, C_2, ..., C_n. Pretpostavljamo homogeno rješenje $y_h(t) = Ce^{\lambda t}$. Pretpostavljeno rješenje uvrstimo u homogenu diferencijalnu jednadžbu te tako dobijemo karakterističnu jednadžbu. Homogena diferencijalna jednadžba sustava je:

$$y''(t) + 0.3y'(t) + 0.02y(t) = 0.$$

Slijedi opće homogeno rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$\begin{aligned}
&{y_h}''(t) + 0.3{y_h}'(t) + 0.02y_h(t) = 0 \\
&y_h(t) = Ce^{\lambda t} \\
&{y_h}'(t) = \lambda Ce^{\lambda t} \\
&{y_h}''(t) = \lambda^2 Ce^{\lambda t} \\
&\lambda^2 Ce^{\lambda t} + 0.3\lambda Ce^{\lambda t} + 0.02Ce^{\lambda t} = 0 \\
&Ce^{\lambda t}\left(\lambda^2 + 0.3\lambda + 0.02\right) = 0 \\
&\lambda^2 + 0.3\lambda + 0.02 = 0.
\end{aligned}$$

Rješenjem karakteristične jednadžbe možemo izračunati korijene karakteristične jednadžbe te dobiti opće rješenje homogene jednadžbe:

$$\begin{aligned}
&\lambda^2 + 0.3\lambda + 0.02 = 0 \\
&\lambda_{1,2} = \frac{-0.3 \pm \sqrt{0.09 - 0.08}}{2} = \frac{-0.3 \pm 0.1}{2} \\
&\lambda_1 = -0.2, \lambda_2 = -0.1.
\end{aligned}$$

Korijeni karakteristične jednadžbe su realni i različiti pa prema tome pretpostavljamo sljedeće homogeno rješenje:

$$\begin{aligned}
&y_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \\
&y_h(t) = C_1 e^{-0.2t} + C_2 e^{-0.1t}.
\end{aligned}$$

Koeficijente C_1 i C_2 ćemo izračunati nakon što pronađemo partikularno rješenje. S obzirom da je funkcija $f(t)$ oblika konstante, pretpostavljamo sljedeće partikularno rješenje:

$$y_p(t) = K.$$

Pretpostavljeno partikularno rješenje uvrstimo u nehomogenu diferencijalnu jednadžbu sustava:

$$
\begin{aligned}
&{y_p}''(t) + 0.3{y_p}'(t) + 0.02y_p(t) = 12 \\
&y_p(t) = K \\
&y_p'(t) = 0 \\
&y''_p(t) = 0 \\
&1 \cdot 0 + 0.3 \cdot 0 + 0.02K = 12 \\
&K = 600
\end{aligned}
$$

te dobijemo partikularno rješenje sustava:

$$y_p(t) = 600.$$

Totalni odziv sustava je:

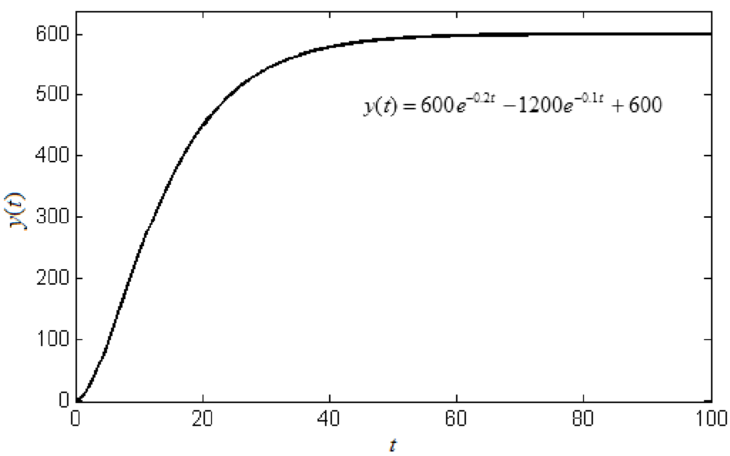
$$y(t) = C_1 e^{-0.2t} + C_2 e^{-0.1t} + 600, t \geqslant 0.$$

Iskoristimo početne uvjete kako bismo izračunali koeficijente C_1 i C_2. U totalni odziv i derivaciju totalnog odziva uvrstimo $t = 0$:

$$
\begin{aligned}
&y(t) = C_1 e^{-0.2t} + C_2 e^{-0.1t} + 600 \\
&y'(t) = -0.2C_1 e^{-0.2t} + -0.1C_2 e^{-0.1t} \\
&y(0) = C_1 + C_2 + 600 = 0 \\
&y'(0) = -0.2C_1 - 0.1C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -2C_1 \\
&C_1 + C_2 = -600 \Rightarrow C_1 - 2C_1 = -600 \Rightarrow C_1 = 600 \\
&C_2 = -1200.
\end{aligned}
$$

Totalni odziv sustava je (slika 4.4):

$$y(t) = 600e^{-0.2t} - 1200e^{-0.1t} + 600, t \geqslant 0.$$



Slika 4.4: Rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe $y''(t)+0.3y'(t)+0.02y(t) = 12$, početni uvjeti: $y'(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Primjer 4.2.2. Sustav je opisan nehomogenom diferencijalnom jednadžbom:

$$y''(t) + 1.3y'(t) + 0.3y(t) = 3t^2, t \geq 0.$$

Početni uvjeti su: $y'(0) = 0$, $y(0) = 0$. Odredite rješenje nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe (totalni odziv sustava).

Rješenje: Totalni odziv sustava jednak je zbroju homogenog rješenja sustava i partikularnog rješenja:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

Prvo ćemo riješiti opću homogenu jednadžbu ($f(t) = 0$), zatim pronaći partikularno rješenje te ćemo na temelju totalnog odziva i početnih uvjeta odrediti koeficijente C_1, C_2, ..., C_n. Pretpostavljamo homogeno rješenje $y_h(t) = Ce^{\lambda t}$.

Pretpostavljeno rješenje uvrstimo u homogenu diferencijalnu jednadžbu te tako dobijemo karakterističnu jednadžbu. Homogena diferencijalna jednadžba sustava je:

$$y''(t) + 1.3y'(t) + 0.3y(t) = 0.$$

Slijedi opće homogeno rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$\begin{aligned}
&{y_h}''(t) + 1.3{y_h}'(t) + 0.3y_h(t) = 0\\
&y_h(t) = Ce^{\lambda t}\\
&{y_h}'(t) = \lambda Ce^{\lambda t}\\
&{y_h}''(t) = \lambda^2 Ce^{\lambda t}\\
&\lambda^2 Ce^{\lambda t} + 1.3\lambda Ce^{\lambda t} + 0.3Ce^{\lambda t} = 0\\
&Ce^{\lambda t}\left(\lambda^2 + 1.3\lambda + 0.3\right) = 0\\
&\lambda^2 + 1.3\lambda + 0.3 = 0.
\end{aligned}$$

Rješenjem karakteristične jednadžbe možemo izračunati korijene karakteristične jednadžbe te dobiti opće rješenje homogene jednadžbe:

$$\begin{aligned}
&\lambda^2 + 1.3\lambda + 0.3 = 0\\
&\lambda_{1,2} = \frac{-1.3 \pm \sqrt{1.69 - 1.2}}{2} = \frac{-1.3 \pm 0.7}{2}\\
&\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -0.3.
\end{aligned}$$

Korijeni karakteristične jednadžbe su realni i različiti pa prema tome pretpostavljamo sljedeće homogeno rješenje:

$$\begin{aligned}
y_h(t) &= C_1e^{\lambda_1 t} + C_2e^{\lambda_2 t}\\
y_h(t) &= C_1e^{-t} + C_2e^{-0.3t}.
\end{aligned}$$

Koeficijente C_1 i C_2 ćemo izračunati nakon što pronađemo partikularno rješenje. S obzirom da je funkcija $f(t)$ oblika polinoma, pretpostavljamo sljedeće partikularno rješenje:

$$y_p(t) = K_0 + K_1t + K_2t^2.$$

Pretpostavljeno partikularno rješenje uvrstimo u nehomogenu diferencijalnu jednadžbu sustava:

$$
\begin{aligned}
&{y_p}''(t) + 1.3{y_p}'(t) + 0.3y_p(t) = 3t^2\\
&y_p(t) = K_0 + K_1 t + K_2 t^2\\
&y_p'(t) = K_1 + 2K_2 t\\
&y_p''(t) = 2K_2\\
&2K_2 + 1.3\left(K_1 + 2K_2 t\right) + 0.3\left(K_0 + K_1 t + K_2 t^2\right) = 3t^2\\
&0.3K_2 t^2 + 2.6K_2 t + 0.3K_1 t + 2K_2 + 1.3K_1 + 0.3K_0 = 3t^2\\
&0.3K_2 = 3 \Rightarrow K_2 = 10\\
&2.6K_2 + 0.3K_1 = 0 \Rightarrow 0.3K_1 = -2.6K_2 \Rightarrow K_1 = -\frac{260}{3}\\
&2K_2 + 1.3K_1 + 0.3K_0 = 0 \Rightarrow 0.3K_0 = -2K_2 - 1.3K_1\\
&0.3K_0 = -20 + \frac{338}{3}/0.3\\
&K_0 = \left(\frac{-60+338}{3}\right)\frac{10}{3} = \frac{2780}{9}
\end{aligned}
$$

te dobijemo partikularno rješenje sustava:

$$
y_p(t) = \frac{2780}{9} - \frac{260}{3}t + 10t^2.
$$

Totalni odziv sustava je:

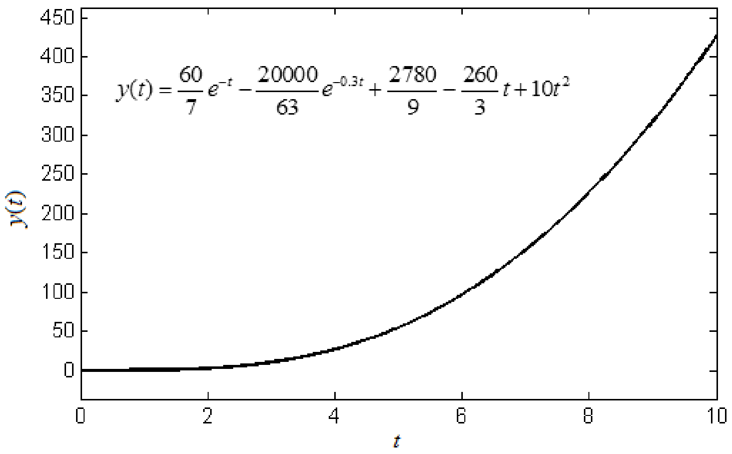
$$
y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-0.3t} + \frac{2780}{9} - \frac{260}{3}t + 10t^2, t \geqslant 0.
$$

Iskoristimo početne uvjete kako bismo izračunali koeficijente C_1 i C_2. U totalni odziv i derivaciju totalnog odziva uvrstimo $t = 0$:

$$
\begin{aligned}
&y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-0.3t} + \frac{2780}{9} - \frac{260}{3}t + 10t^2\\
&y'(t) = -C_1 e^{-t} - 0.3C_2 e^{-0.3t} - \frac{260}{3} + 20t\\
&y(0) = C_1 + C_2 + \frac{2780}{9} = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = -\frac{2780}{9}\\
&y'(0) = -C_1 - 0.3C_2 - \frac{260}{3} = 0 \Rightarrow -C_1 - 0.3C_2 = \frac{260}{3}\\
&C_1 + C_2 = -\frac{2780}{9}\\
&\underline{-C_1 - 0.3C_2 = \frac{260}{3}}\\
&0.7C_2 = -\frac{2780}{9} + \frac{780}{9} = -\frac{2000}{9}\\
&C_2 = -\frac{20000}{63}\\
&C_1 = -\frac{2780}{9} + \frac{20000}{63} = \frac{60}{7}.
\end{aligned}
$$

Totalni odziv sustava je (slika 4.5):

$$y(t) = \frac{60}{7}e^{-t} - \frac{20000}{63}e^{-0.3t} + \frac{2780}{9} - \frac{260}{3}t + 10t^2, t \geqslant 0.$$



Slika 4.5: Rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe $y''(t)+1.3y'(t)+0.3y(t) = 3t^2$, početni uvjeti: $y'(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Primjer 4.2.3. Sustav je opisan nehomogenom diferencijalnom jednadžbom:

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = \sin t, t \geq 0.$$

Početni uvjeti su: $y'(0) = 0, y(0) = 0$. Odredite rješenje nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe (totalni odziv sustava).

Rješenje: Totalni odziv sustava jednak je zbroju homogenog rješenja sustava i partikularnog rješenja:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

Prvo ćemo riješiti opću homogenu jednadžbu ($f(t) = 0$), zatim pronaći partikularno rješenje te ćemo na temelju totalnog odziva i početnih uvjeta odrediti koeficijente C_1, C_2, ..., C_n. Pretpostavljamo homogeno rješenje $y_h(t) = Ce^{\lambda t}$.

Pretpostavljeno rješenje uvrstimo u homogenu diferencijalnu jednadžbu te tako dobijemo karakterističnu jednadžbu. Homogena diferencijalna jednadžba sustava je:

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0.$$

Slijedi opće homogeno rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$
\begin{aligned}
&{y_h}''(t) + 5{y_h}'(t) + 6y_h(t) = 0 \\
&y_h(t) = Ce^{\lambda t} \\
&{y_h}'(t) = \lambda Ce^{\lambda t} \\
&{y_h}''(t) = \lambda^2 Ce^{\lambda t} \\
&\lambda^2 Ce^{\lambda t} + 5\lambda Ce^{\lambda t} + 6Ce^{\lambda t} = 0 \\
&Ce^{\lambda t}\left(\lambda^2 + 5\lambda + 6\right) = 0 \\
&\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0.
\end{aligned}
$$

Rješenjem karakteristične jednadžbe možemo izračunati korijene karakteristične jednadžbe te dobiti opće rješenje homogene jednadžbe:

$$
\begin{aligned}
&\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \\
&\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} \\
&\lambda_1 = -3, \lambda_2 = -2.
\end{aligned}
$$

Korijeni karakteristične jednadžbe su realni i različiti pa prema tome pretpostavljamo sljedeće homogeno rješenje:

$$
\begin{aligned}
&y_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \\
&y_h(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-2t}.
\end{aligned}
$$

Koeficijente C_1 i C_2 ćemo izračunati nakon što pronađemo partikularno rješenje. S obzirom da je funkcija $f(t)$ oblika sinus funkcije pretpostavljamo sljedeće partikularno rješenje:

$$y_p(t) = K_1 \cos t + K_2 \sin t.$$

Pretpostavljeno partikularno rješenje uvrstimo u nehomogenu diferencijalnu jednadžbu sustava:

$$
\begin{aligned}
&{y_p}''(t) + 5{y_p}'(t) + 6y_p(t) = \sin t \\
&y_p(t) = K_1 \cos t + K_2 \sin t \\
&y_p'(t) = -K_1 \sin t + K_2 \cos t \\
&{y''}_p(t) = -K_1 \cos t - K_2 \sin t \\
&-K_1 \cos t - K_2 \sin t + 5\left(-K_1 \sin t + K_2 \cos t\right) + 6\left(K_1 \cos t + K_2 \sin t\right) = \sin t \\
&-K_2 \sin t - 5K_1 \sin t + 6K_2 \sin t - K_1 \cos t + 5K_2 \cos t + 6K_1 \cos t = \sin t \\
&-5K_1 + 5K_2 = 1 \\
&5K_2 + 5K_1 = 0 \Rightarrow K_1 = -K_2 \\
&10K_2 = 1 \Rightarrow K_2 = 0.1 \\
&K_1 = -0.1
\end{aligned}
$$

te dobijemo partikularno rješenje sustava:

$$y_p(t) = -0.1 \cos t + 0.1 \sin t.$$

Partikularno rješenje se u ovom slučaju može zapisati u obliku relacije (4.15). Prema relaciji (4.16) amplituda i faza jednaki su ($K_1 = -0.1$, $K_2 = 0.1$):

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{K_1^2 + K_2^2} = \sqrt{(-0.1)^2 + 0.1^2} = 0.1414 \\ \varphi &= \tan^{-1}\tfrac{K_1}{K_2} = \tan^{-1}\tfrac{-0.1}{0.1} = -\tfrac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Partikularno rješenje, prema relaciji (4.15), ima sljedeći oblik:

$$y_p(t) = 0.1414 \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Totalni odziv sustava je:

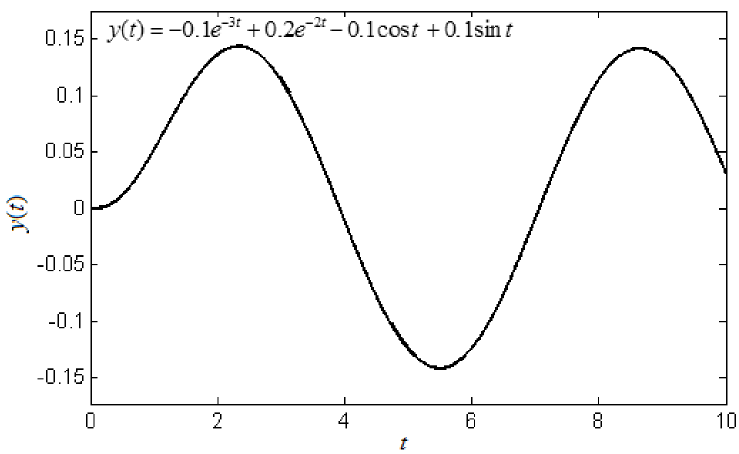
$$y(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-2t} - 0.1 \cos t + 0.1 \sin t, t \geqslant 0.$$

Iskoristimo početne uvjete kako bismo izračunali koeficijente C_1 i C_2. U totalni odziv i derivaciju totalnog odziva uvrstimo $t = 0$:

$$\begin{aligned} & y(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-2t} - 0.1 \cos t + 0.1 \sin t \\ & y'(t) = -3C_1 e^{-3t} - 2C_2 e^{-2t} + 0.1 \sin t + 0.1 \cos t \\ & y(0) = C_1 + C_2 - 0.1 = 0 \\ & y'(0) = -3C_1 - 2C_2 + 0.1 = 0 \\ & C_1 + C_2 = 0.1 / \cdot 3 \\ & \underline{-3C_1 - 2C_2 = -0.1} \\ & 3C_1 + 3C_2 = 0.3 \\ & \underline{-3C_1 - 2C_2 = -0.1} \\ & C_2 = 0.2 \\ & C_1 = 0.1 - C_2 = -0.1. \end{aligned}$$

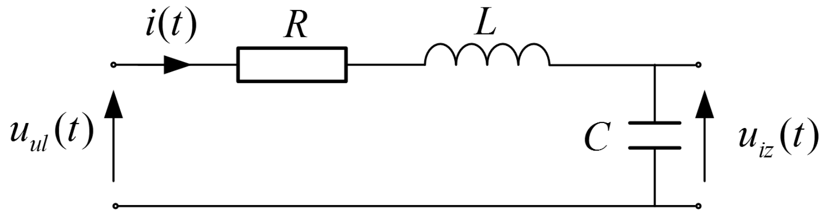
Totalni odziv sustava je (slika 4.6):

$$y(t) = -0.1 e^{-3t} + 0.2 e^{-2t} - 0.1 \cos t + 0.1 \sin t, t \geqslant 0.$$



Slika 4.6: Rješenje nehomogene diferencijalne jednadžbe $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = \sin t$, početni uvjeti: $y'(0) = 0$, $y(0) = 0$.

Primjer 4.2.4. Na slici 4.7 prikazan je RLC krug.



Slika 4.7: RLC krug

Odredite diferencijalnu jednadžbu RLC kruga.

Rješenje: Sustav sa slike 4.7 možemo opisati sljedećim diferencijalnim jednadžbama:

$$\begin{aligned} u_{ul}(t) &= Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau \\ u_{iz}(t) &= \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau \end{aligned}$$

gdje je:

- $Ri(t)$ - pad napona na otporniku,
- $L\frac{di(t)}{dt}$ - pad napona na induktivitetu,
- $\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau$ - pad napona na kondenzatoru,
- $u_{ul}(t)$ - ulazni napon,
- $u_{iz}(t)$ - izlazni napon.

Nadalje, s obzirom na ulaz i izlaz sustava potrebno je eliminirati struju $i(t)$:

$$\begin{aligned} &u_{ul}(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau \Rightarrow u_{ul}(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + u_{iz}(t) \\ &u_{iz}(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau / \frac{d}{dt} \Rightarrow u'_{iz}(t) = \frac{1}{C}i(t) \Rightarrow i(t) = Cu'_{iz}(t) / \frac{d}{dt} \Rightarrow i'(t) = Cu''_{iz}(t) \\ &u_{ul}(t) = RCu'_{iz}(t) + LCu''_{iz}(t) + u_{iz}(t) \\ &LCu''_{iz}(t) + RCu'_{iz}(t) + u_{iz}(t) = u_{ul}(t). \end{aligned}$$

Diferencijalna jednadžba sustava RLC kruga sa slike 4.7 je:

$$LCu''_{iz}(t) + RCu'_{iz}(t) + u_{iz}(t) = u_{ul}(t).$$

Radi jednostavnosti izlazni napon $u_{iz}(t)$ možemo zamijeniti s $y(t)$, a ulazni napon $u_{ul}(t)$ s $u(t)$:

$$LCy''(t) + RCy'(t) + y(t) = u(t).$$

Neka uz najvišu derivaciju izlaza stoji jedinica (podijelimo cijelu jednadžbu s LC):

$$y''(t) + \frac{R}{L}y'(t) + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{LC}u(t).$$

Primjer 4.2.5. Odredite odziv sustava RLC kruga sa slike 4.7 ako vrijedi: $L = 1$ H, $C = 0.5$ F, $R = 1$ Ω, $u(t) = 5$ V. Svi početni uvjeti jednaki su nuli.

Rješenje: Diferencijalna jednadžba RLC kruga je: $y''(t) + \frac{R}{L}y'(t) + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{LC}u(t)$. U diferencijalnu jednadžbu RLC kruga uvrstimo parametre i ulazni signal (pobudu) te dobijemo:

$$y''(t) + y'(t) + 2y(t) = 2u(t).$$

Totalni odziv sustava jednak je zbroju homogenog rješenja sustava i partikularnog rješenja:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

Prvo ćemo riješiti opću homogenu jednadžbu ($f(t) = 0$), zatim pronaći partikularno rješenje te ćemo na temelju totalnog odziva i početnih uvjeta odrediti koeficijente C_1, C_2, ..., C_n. Pretpostavljamo homogeno rješenje $y_h(t) = Ce^{\lambda t}$.

Pretpostavljeno rješenje uvrstimo u homogenu diferencijalnu jednadžbu te tako dobijemo karakterističnu jednadžbu. Homogena diferencijalna jednadžba sustava je:

$$y''(t) + y'(t) + 2y(t) = 0.$$

Slijedi opće homogeno rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$\begin{aligned}
&{y_h}''(t) + {y_h}'(t) + 2y_h(t) = 0\\
&y_h(t) = Ce^{\lambda t}\\
&{y_h}'(t) = \lambda Ce^{\lambda t}\\
&{y_h}''(t) = \lambda^2 Ce^{\lambda t}\\
&\lambda^2 Ce^{\lambda t} + \lambda Ce^{\lambda t} + 2Ce^{\lambda t} = 0\\
&Ce^{\lambda t}\left(\lambda^2 + \lambda + 2\right) = 0\\
&\lambda^2 + \lambda + 2 = 0.
\end{aligned}$$

Rješenjem karakteristične jednadžbe možemo izračunati korijene karakteristične jednadžbe te dobiti opće rješenje homogene jednadžbe:

$$\begin{aligned}
&\lambda^2 + \lambda + 2 = 0\\
&\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2}\frac{-1 \pm j\sqrt{7}}{2}\\
&\lambda_1 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{7}}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{7}}{2}.
\end{aligned}$$

Korijeni karakteristične jednadžbe su konjugirano kompleksni pa prema tome pretpostavljamo sljedeće homogeno rješenje:

$$y_h(t) = e^{\sigma t}\left(C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t)\right)$$
$$y_h(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right) \text{ V}.$$

Koeficijente C_1 i C_2 izračunamo nakon što pronađemo partikularno rješenje. S obzirom da je funkcija $f(t)$ oblika konstante pretpostavljamo sljedeće partikularno rješenje:

$$y_p(t) = K.$$

Pretpostavljeno partikularno rješenje uvrstimo u nehomogenu diferencijalnu jednadžbu sustava:

$$y_p{}''(t) + y_p{}'(t) + 2y_p(t) = 2 \cdot 5$$
$$y_p(t) = K$$
$$y_p'(t) = 0$$
$$y''_p(t) = 0$$
$$1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2K = 2 \cdot 5$$
$$K = 5$$

te dobijemo partikularno rješenje sustava:

$$y_p(t) = 5 \text{ V}.$$

Totalni odziv sustava je:

$$y(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-2t} + 5 \text{ V}, \text{t} \geqslant 0.$$

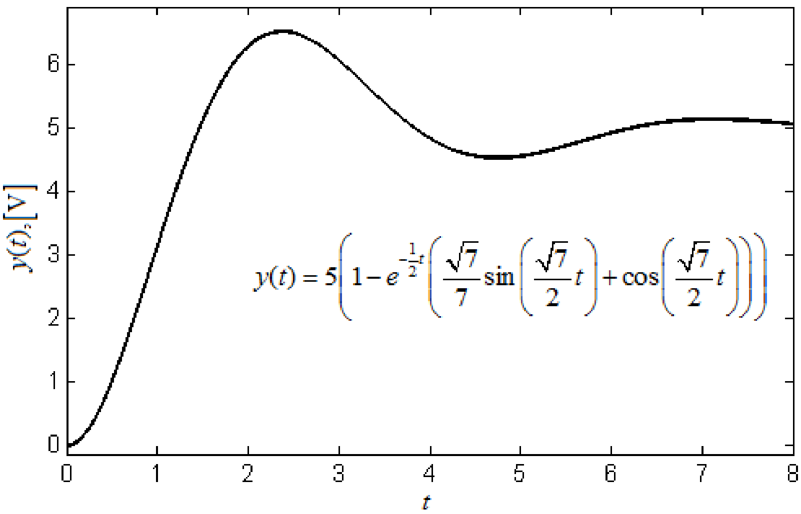
Iskoristimo početne uvjete kako bismo izračunali koeficijente C_1 i C_2. U totalni odziv i derivaciju totalnog odziva uvrstimo $t = 0$:

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right) + 5$$
$$y'(t) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\left(C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right) +$$
$$+e^{-\frac{1}{2}t}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) - \frac{\sqrt{7}}{2}C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right)$$
$$y(0) = C_2 + 5 = 0 \Rightarrow C_2 = -5$$
$$y'(0) = -\frac{1}{2}C_2 + \frac{\sqrt{7}}{2}C_1 = 0$$
$$C_1 = -5\frac{\sqrt{7}}{7}.$$

Totalni odziv sustava je (slika 4.8):

$$y(t) = 5 - e^{-\frac{1}{2}t}\left(5\frac{\sqrt{7}}{7}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + 5\cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right)$$

$$y(t) = 5\left(1 - e^{-\frac{1}{2}t}\left(\frac{\sqrt{7}}{7}\sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\right)\right) \quad \mathrm{V, t} \geqslant 0.$$



Slika 4.8: Odziv RLC kruga s parametrima $L = 1$ H, $C = 0.5$ F i $R = 1\ \Omega$, ulaznim signalom $u(t) = 5$ V i početnim uvjetima jednakim nula

Primjer 4.2.6. Odredite odziv sustava RLC kruga sa slike 4.7 ako vrijedi: $L = 1$ H, $C = 0.04$ F, $R = 10\ \Omega$ i

1. $u(t) = 12e^{-2t}$ V,
2. $u(t) = 5e^{-5t}$ V.

Svi početni uvjeti jednaki su nuli.

Rješenje Za pobudu $u(t) = 12e^{-2t}$ V vrijedi:

Diferencijalna jednadžba RLC kruga je: $y''(t) + \frac{R}{L}y'(t) + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{LC}u(t)$. U diferencijalnu jednadžbu RLC kruga uvrstimo parametre i ulazni signal (pobudu) te se dobije:

$$y''(t) + 10y'(t) + 25y(t) = 25u(t).$$

Totalni odziv sustava jednak je zbroju homogenog rješenja sustava i partikularnog rješenja:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t).$$

Prvo ćemo riješiti opću homogenu jednadžbu ($f(t) = 0$), zatim pronaći partikularno rješenje te ćemo na temelju totalnog odziva i početnih uvjeta odrediti koeficijente C_1, C_2, ..., C_n. Pretpostavljamo homogeno rješenje $y_h(t) = Ce^{\lambda t}$.

Pretpostavljeno rješenje uvrstimo u homogenu diferencijalnu jednadžbu te tako dobijemo karakterističnu jednadžbu. Homogena diferencijalna jednadžba sustava je:

$$y''(t) + 10y'(t) + 25y(t) = 0.$$

Slijedi opće homogeno rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$\begin{aligned}
&{y_h}''(t) + 10{y_h}'(t) + 25y_h(t) = 0 \\
&y_h(t) = Ce^{\lambda t} \\
&{y_h}'(t) = \lambda Ce^{\lambda t} \\
&{y_h}''(t) = \lambda^2 Ce^{\lambda t} \\
&\lambda^2 Ce^{\lambda t} + 10\lambda Ce^{\lambda t} + 25Ce^{\lambda t} = 0 \\
&Ce^{\lambda t}\left(\lambda^2 + 10\lambda + 25\right) = 0 \\
&\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0.
\end{aligned}$$

Rješenjem karakteristične jednadžbe možemo izračunati korijeni karakteristične jednadžbe te dobiti opće rješenje homogene jednadžbe:

$$\begin{aligned}
&\lambda^2 + 10\lambda + 25 = 0 \\
&\lambda_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} = -5 \\
&\lambda_1 = -5, \lambda_2 = -5.
\end{aligned}$$

Korijeni karakteristične jednadžbe su dvostruki pa prema tome pretpostavljamo sljedeće homogeno rješenje:

$$\begin{aligned}
y_h(t) &= e^{\lambda_1 t}\left(C_1 + C_2 t\right) \\
y_h(t) &= e^{-5t}\left(C_1 + C_2 t\right).
\end{aligned}$$

Koeficijente C_1 i C_2 ćemo izračunati nakon što pronađemo partikularno rješenje. S obzirom da je funkcija $f(t)$ oblika eksponencijalne funkcije, potrebno je obratiti pažnju na parametar a eksponencijalne funkcije. S obzirom da parametar eksponencijalne funkcije nije jednak nekom od korijena karakteristične jednadžbe pretpostavlja se sljedeće partikularno rješenje:

$$y_p(t) = Ke^{-2t}$$

Pretpostavljeno partikularno rješenje uvrstimo u nehomogenu diferencijalnu jednadžbu sustava:

$$\begin{aligned}
&{y_p}''(t) + 10{y_p}'(t) + 25y_p(t) = 25 \cdot 12e^{-2t} \\
&y_p(t) = Ke^{-2t} \\
&y'_p(t) = -2Ke^{-2t} \\
&{y''}_p(t) = 4Ke^{-2t} \\
&1 \cdot 4Ke^{-2t} + 10\left(-2Ke^{-2t}\right) + 25Ke^{-2t} = 25 \cdot 12e^{-2t} \\
&9Ke^{-2t} = 300e^{-2t} \\
&K = \frac{100}{3}
\end{aligned}$$

te se dobije partikularno rješenje sustava:

$$y_p(t) = \frac{100}{3}e^{-2t}.$$

Totalni odziv sustava je:

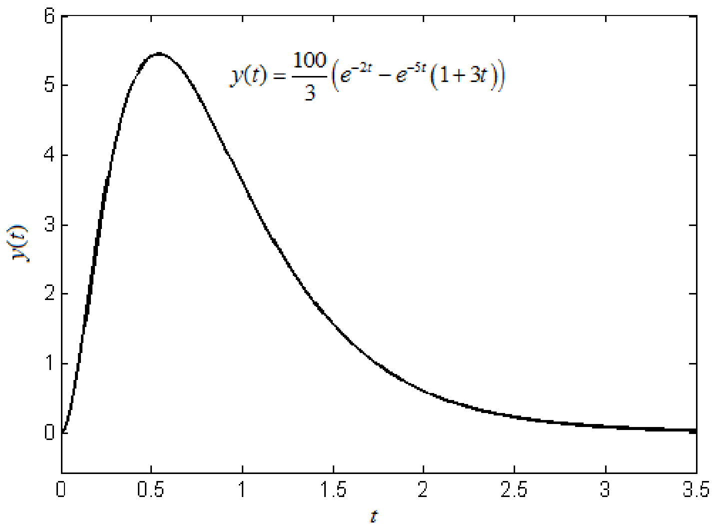
$$y(t) = e^{-5t}\left(C_1 + C_2 t\right) + \frac{100}{3}e^{-2t}\ \mathrm{V}, \mathrm{t} \geqslant 0..$$

Iskoristimo početne uvjete kako bismo izračunali koeficijenti C_1 i C_2. U totalni odziv i derivaciju totalnog odziva uvrstimo $t = 0$:

$$\begin{aligned}
&y(t) = e^{-5t}\left(C_1 + C_2 t\right) + \frac{100}{3}e^{-2t}\\
&y'(t) = -5e^{-5t}\left(C_1 + C_2 t\right) + C_2 e^{-5t} - \frac{200}{3}e^{-2t}\\
&y(0) = C_1 + \frac{100}{3} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{100}{3}\\
&y'(0) = -5C_1 + C_2 - \frac{200}{3} = 0 \Rightarrow C_2 = 5C_1 + \frac{200}{3} = -\frac{300}{3} = -100.
\end{aligned}$$

Totalni odziv sustava je (slika 4.9):

$$y(t) = e^{-5t}\left(-\frac{100}{3} - 100t\right) + \frac{100}{3}e^{-2t} = \frac{100}{3}\left(e^{-2t} - e^{-5t}\left(1 + 3t\right)\right)\ \mathrm{V}, \mathrm{t} \geqslant 0.$$



Slika 4.9: Odziv RLC kruga s parametrima $L = 1$ H, $C = 0.04$ F i $R = 10\ \Omega$, ulaznim signalom $u(t) = 12e^{-2t}$ V i početnim uvjetima jednakim nula

Za pobudu $u(t) = 5e^{-5t}$ V vrijedi:

Homogeno rješenje možemo preuzeti iz prethodnog primjera:

$$\begin{aligned}
y_h(t) &= e^{\lambda_1 t}\left(C_1 + C_2 t\right)\\
y_h(t) &= e^{-5t}\left(C_1 + C_2 t\right).
\end{aligned}$$

Koeficijente C_1 i C_2 ćemo izračunati nakon što pronađemo partikularno rješenje. S obzirom da je funkcija $f(t)$ oblika eksponencijalne funkcije, potrebno je obratiti pažnju na parametar a eksponencijalne funkcije.

S obzirom da je parametar eksponencijalne funkcije jednak dvostrukim korijenima karakteristične jednadžbe pretpostavljamo sljedeće partikularno rješenje:

$$y_p(t) = Kt^2e^{-5t}.$$

Pretpostavljeno partikularno rješenje uvrstimo u nehomogenu diferencijalnu jednadžbu sustava:

$$
\begin{aligned}
&y_p(t) = Kt^2e^{-5t}\\
&y_p{}''(t) + 10y_p{}'(t) + 25y_p(t) = 25 \cdot 5e^{-5t}\\
&y_p(t) = Kt^2e^{-5t}\\
&y_p'(t) = -5Kt^2e^{-5t} + 2Kte^{-5t}\\
&y''_p(t) = 25Kt^2e^{-5t} - 10Kte^{-5t} - 10Kte^{-5t} + 2Ke^{-5t}\\
&25Kt^2e^{-5t} - 20Kte^{-5t} + 2Ke^{-5t} + 10\left(-5Kt^2e^{-5t} + 2Kte^{-5t}\right) + 25Kt^2e^{-5t} = 125e^{-5t}\\
&25Kt^2e^{-5t} - 50Kt^2e^{-5t} + 25Kt^2e^{-5t} - 20Kte^{-5t} + 20Kte^{-5t} + 2Ke^{-5t} = 125e^{-5t}\\
&2K = 125 \Rightarrow K = \frac{125}{2}
\end{aligned}
$$

te dobijemo partikularno rješenje sustava:

$$y_p(t) = \frac{125}{2}t^2e^{-5t}.$$

Totalni odziv sustava je:

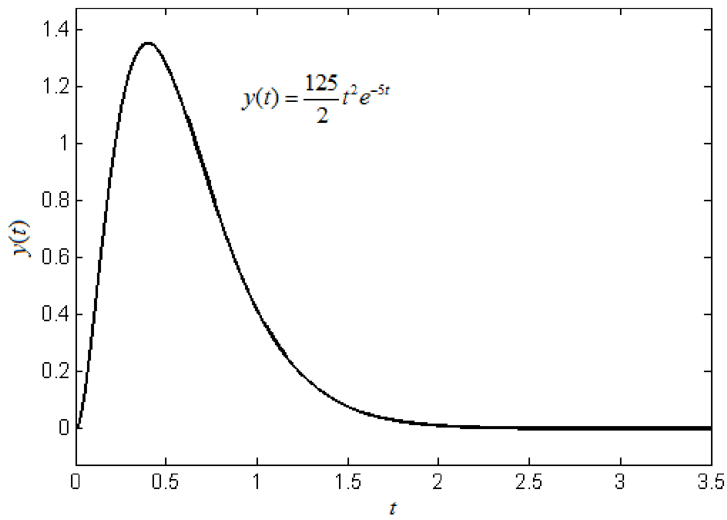
$$y(t) = e^{-5t}\left(C_1 + C_2t\right) + \frac{125}{2}t^2e^{-5t} = e^{-5t}\left(C_1 + C_2t + \frac{125}{2}t^2\right) \text{ V, t} \geqslant 0.$$

Iskoristimo početne uvjete kako bismo izračunali koeficijenti C_1 i C_2. U totalni odziv i derivaciju totalnog odziva uvrstimo $t = 0$:

$$
\begin{aligned}
&y(t) = e^{-5t}\left(C_1 + C_2t + \frac{125}{2}t^2\right)\\
&y'(t) = -5e^{-5t}\left(C_1 + C_2t + \frac{125}{2}t^2\right) + e^{-5t}\left(C_2 + 125t\right)\\
&y(0) = C_1 = 0\\
&y'(0) = -5C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 5C_1 = 0.
\end{aligned}
$$

Totalni odziv sustava je (slika 4.10):

$$y(t) = \frac{125}{2}t^2e^{-5t} \text{ V, t} \geqslant 0.$$



Slika 4.10: Odziv RLC kruga s parametrima $L = 1$ H, $C = 0.04$ F i $R = 10\ \Omega$, ulaznim signalom $u(t) = 5e^{-5t}$ V i početnim uvjetima jednakim nula

4.2.1 Zadaci za vježbu

Zadatak 4.2.1. Sustav je opisan nehomogenom diferencijalnom jednadžbom:

$$y''(t) + y'(t) + 3y(t) = 8, t \geq 0.$$

Početni uvjeti su: $y'(0) = 1$, $y(0) = 0$. Odredite rješenje nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe (totalni odziv sustava).

Zadatak 4.2.2. Sustav je opisan nehomogenom diferencijalnom jednadžbom:

$$y''(t) + 0.5y'(t) + 0.06y(t) = 3 + 2t^2, t \geq 0.$$

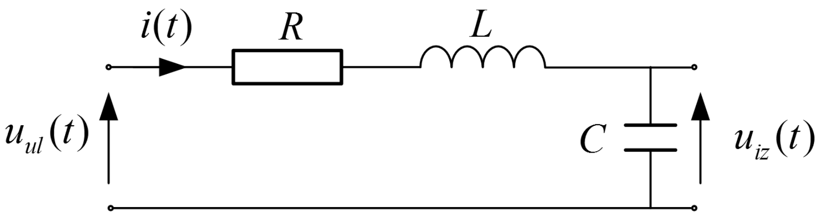
Početni uvjeti su: $y'(0) = 0$, $y(0) = 0$. Odredite rješenje nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe (totalni odziv sustava).

Zadatak 4.2.3. Sustav je opisan nehomogenom diferencijalnom jednadžbom:

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = \cos(2t) + \sin(2t), t \geq 0.$$

Početni uvjeti su: $y'(0) = 0$, $y(0) = 0$. Odredite rješenje nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe (totalni odziv sustava).

Zadatak 4.2.4. Na slici 4.11 prikazan je RLC krug.



Slika 4.11: RLC krug

Odredite diferencijalnu jednadžbu RLC kruga te odzive u ovisnosti o parametrima i ulaznom signalu za sljedeće slučajeve:

1. $L = 1$ H, $C = 0.4$ F i $R = 1$ Ω, $u(t) = 10 + 2t$ V
2. $L = 1$ H, $C = 4$ F i $R = 1$ Ω, $u(t) = 5e^{-t}$ V
3. $L = 1$ H, $C = 4$ F i $R = 1$ Ω, $u(t) = 5e^{-0.5t}$ V.

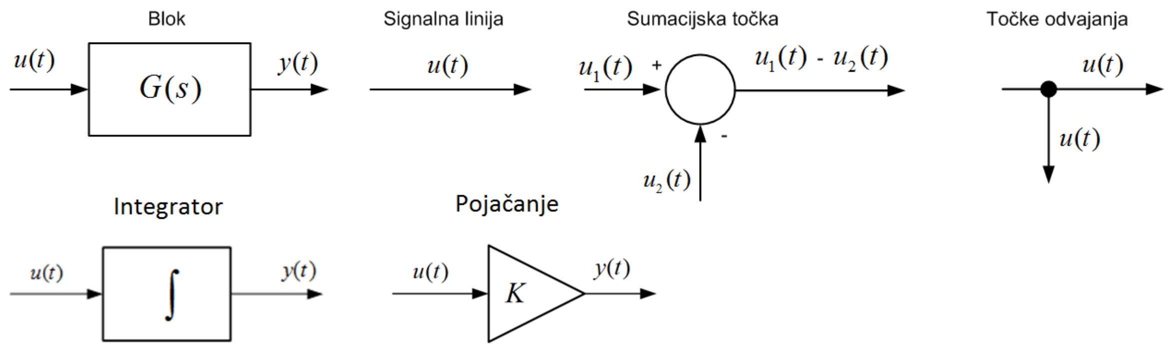
Poglavlje 5

Blokovski prikaz sustava

Osnovni simboli koji se koriste u blokovskom prikazu sustava su:

- blok - predstavlja vezu između ulazne i izlazne veličine.
- signalne linije - to su linije sa strjelicama kojima se prikazuje tok signala. Njima se povezuju ostale komponente blok dijagrama.
- sumacijske točke - krug koji služi za zbrajanje i oduzimanje dvaju i više signala.
- točke odvajanja - točka na signalnoj liniji koja označava odvajanje signala prema nekom bloku ili sumacijskoj točki.
- integrator - integrira ulazni signal.
- pojačanje - pojačava ulazni signal.

Osnovni simboli blok dijagrama prikazani su na slici 5.1



Slika 5.1: Osnovni simboli u blok dijagramima

Primjer 5.1. Sustav je opisan diferencijalnom jednadžbom:

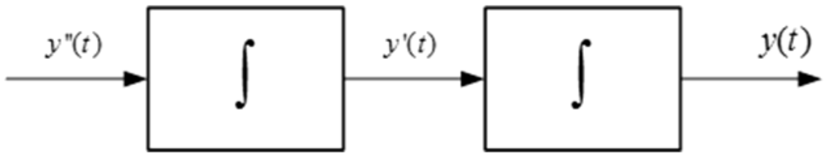
$$y''(t) + 2.3y'(t) + 4y(t) = 2.3u(t).$$

Prikažite ovaj sustav blokovski.

Rješenje Zadani sustav je drugog reda te će stoga imati dva integratora. S obzirom da vrijedi:

$$y'(t) = \int_0^t y''(t)d\tau$$
$$y(t) = \int_0^t y'(t)d\tau,$$

odnosno blokovski prikazano na slici 5.2:

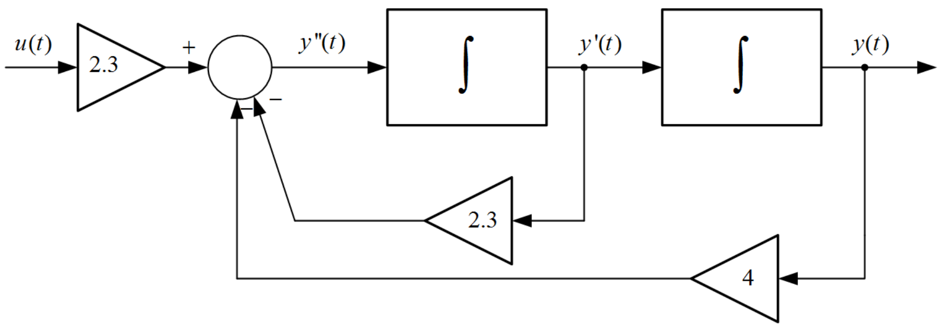


Slika 5.2: Kaskada dva integratora

potrebno je izraziti drugu derivaciju izlaza sustava pomoću ostalih:

$$y''(t) = 2.3u(t) - 2.3y'(t) - 4y(t).$$

U izvedenom izrazu nalaze se operacije množenja konstantom, zbrajanja i oduzimanja te integriranja. Blokovski prikaz sustava prikazan je na slici 5.3.



Slika 5.3: Blokovski prikaz sustava $y''(t) + 2.3y'(t) + 4y(t) = 2.3u(t)$

Primjer 5.2. Sustav je opisan diferencijalnom jednadžbom:

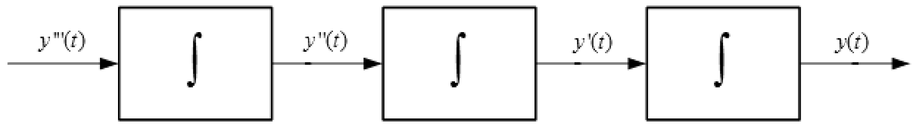
$$y'''(t) + 3.1y''(t) + 0.1y'(t) + 8.2y(t) = 8.2u(t).$$

Prikažite ovaj sustav blokovski.

Rješenje Zadani sustav je drugog reda te će stoga imati dva integratora. S obzirom da vrijedi:

$$y''(t) = \int_0^t y'''(t)d\tau$$
$$y'(t) = \int_0^t y''(t)d\tau$$
$$y(t) = \int_0^t y'(t)d\tau,$$

odnosno blokovski prikazano na slici 5.4:

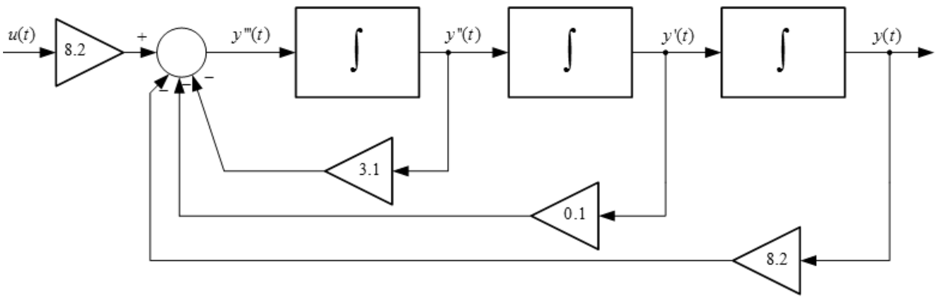


Slika 5.4: Kaskada tri integratora

potrebno je izraziti drugu derivaciju izlaza sustava pomoću ostalih:

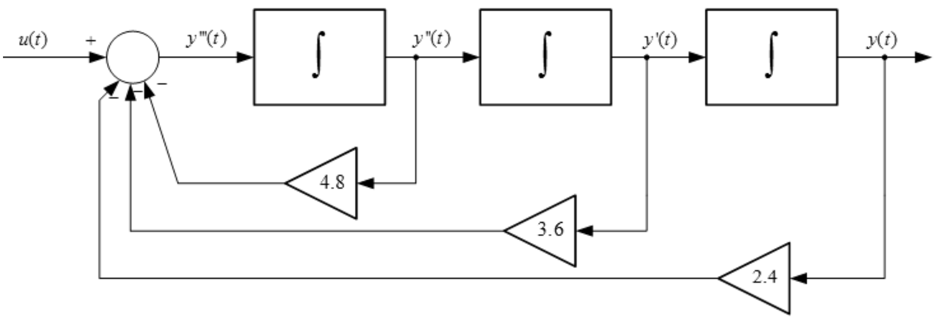
$$y'''(t) = 8.2u(t) - 3.1y''(t) - 0.1y'(t) - 8.2y(t).$$

U izvedenom izrazu nalaze se operacije množenja konstantom, zbrajanja i oduzimanja te integriranja. Blokovski prikaz sustava prikazan je na slici 5.5.



Slika 5.5: Blokovski prikaz sustava $y'''(t) + 3.1y''(t) + 0.1y'(t) + 8.2y(t) = 8.2u(t)$

Primjer 5.3. Sustav je opisan blokovskom shemom na slici 5.6:



Slika 5.6: Blokovski prikaz sustava

Prikažite ovaj sustav linearnom diferencijalnom jednadžbom.

Rješenje Prikažimo najvišu derivaciju izlaza sustava linearnom kombinacijom ostalih derivacija izlaza i ulaza:

$$y'''(t) = u(t) - 4.8y''(t) - 3.6y'(t) - 2.4y(t).$$

Sve članove koji predstavljaju derivaciju izlaza prebacimo na lijevu stranu te dobijemo diferencijalnu jednadžbu sustava:

$$y'''(t) + 4.8y''(t) + 3.6y'(t) + 2.4y(t) = u(t).$$

5.1 Zadaci za vježbu

Zadatak 5.1. Sustav je opisan diferencijalnom jednadžbom:

$$y''(t) + 0.7y'(t) + 2.1y(t) = 100u(t).$$

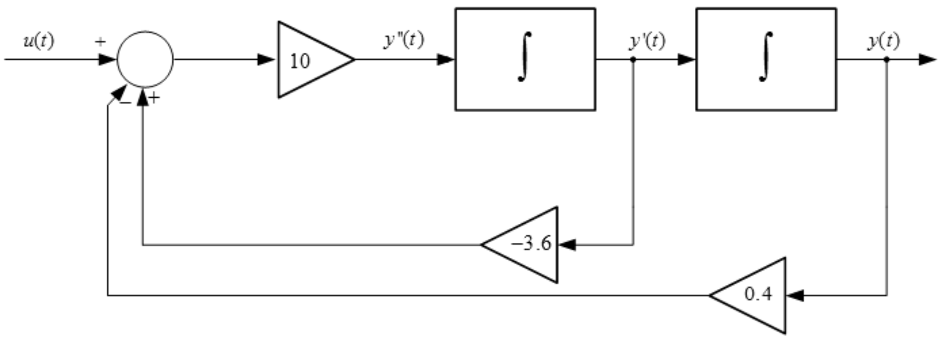
Prikažite ovaj sustav blokovski.

Zadatak 5.2. Sustav je opisan diferencijalnom jednadžbom:

$$y'''(t) + 2.1y''(t) - 0.7y'(t) - 22.1y(t) = -5.3u(t).$$

Prikažite ovaj sustav blokovski.

Zadatak 5.3. Sustav je opisan blokovskom shemom na slici 5.7:



Slika 5.7: Blokovski prikaz sustava

Prikažite ovaj sustav linearnom diferencijalnom jednadžbom.

Poglavlje 6

Impulsni odziv i konvolucijski integral

Impulsni odziv sustava je odziv sustava na *dirac* delta signal $\delta(t)$ u vremenskoj domeni. Impulsni odziv u potpunosti opisuje mirni kontinuirani sustav s jednim ulazom i jednim izlazom. Impulsni odziv (težinska funkcija) označava se s $g(t)$ i pritom vrijedi $g(t) = 0, t < 0$. Ako je sustav linearan i vremenski nepromjenjiv tada se njegov mirni sustav (sustav s početnim uvjetima jednakima nuli $y(0) = y'(0) = y''(0) = ... = y^{(n-1)}(0) = 0$) može izračunati pomoću konvolucijskog integrala:

$$\begin{aligned} y_m(t) = g(t) * u(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau \\ y_m(t) = g(t) * u(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)u(\tau)d\tau, \end{aligned} \tag{6.1}$$

odnosno konvolucijom impulsnog odziva i ulaznog signala. Konvolucija se označava s operatorom $*$.

Primjer 6.1. Odredite odziv mirnog sustava na jediničnu skokovitu pobudu $\mu(t)$ opisanog impulsnim odzivom:

$$g(t) = \begin{cases} e^{-3t} & za \quad t \geqslant 0 \\ 0 & za \quad t < 0 \end{cases}.$$

Rješenje Impulsni odziv ima definiciju (s obzirom na nezavisnu varijablu t) sličnu jediničnoj stepenici pa $g(t)$ možemo skraćeno napisati kao:

$$g(t) = e^{-3t}\mu(t).$$

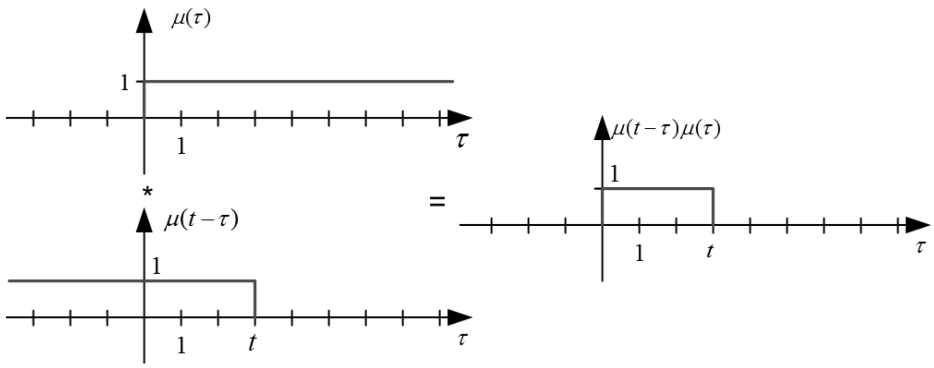
Da bismo odredili odziv sustava na jediničnu skokovitu pobudu koristimo konvolucijski integral:

$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau.$$

Umjesto ulaznog signala uvrstimo step signal, a umjesto funkcije $g(\tau)$ impulsni odziv te dobijemo:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3\tau}\mu(\tau)\mu(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} e^{-3\tau}d\tau = -\frac{1}{3}e^{-3\tau}\Big|_0^t = \frac{1}{3}\left(1-e^{-3t}\right), t \geqslant 0,$$

odnosno tako dobijemo odziv sustava na jediničnu stepenicu. Granice integracije kod konvolucijskog integrala pomiču se na interval [0, t] iz razloga što umnožak $\mu(\tau)\mu(t-\tau)$ egzistira samo na tom intervalu (slika 6.1).



Slika 6.1: Umnožak jediničnih stepenica

Primjer 6.2. Odredite odziv mirnog sustava na jediničnu skokovitu pobudu $\mu(t)$ opisanog impulsnim odzivom:

$$g(t) = \mu(t) = \begin{cases} 1 & za \quad t \geqslant 0 \\ 0 & za \quad t < 0 \end{cases}.$$

Rješenje Da bismo odredili odziv sustava na jediničnu skokovitu pobudu koristimo konvolucijski integral:

$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau.$$

Umjesto ulaznog signala uvrstimo step signal, a umjesto funkcije $g(\tau)$ impulsni odziv pa dobijemo:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mu(\tau)\mu(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} 1d\tau = t|_0^t = t, t \geqslant 0,$$

odnosno tako dobijemo odziv sustava na jediničnu stepenicu. Možemo zaključiti da se radi o impulsnom odzivu sustavu tipa integrator.

Primjer 6.3. Odredite odziv mirnog sustava na impulsnu pobudu $\delta(t)$ opisanog impulsnim odzivom:

$$g(t) = \begin{cases} t & za \quad t \geqslant 0 \\ 0 & za \quad t < 0 \end{cases}.$$

Rješenje Impulsni odziv ima definiciju (s obzirom na nezavisnu varijablu t) sličnu jediničnoj stepenici pa $g(t)$ skraćeno možemo napisati kao:

$$g(t) = t\mu(t).$$

Da bismo odredili odziv sustava na jediničnu skokovitu pobudu koristimo konvolucijski integral:

$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau.$$

Umjesto ulaznog signala uvrstimo step signal, a umjesto funkcije $g(\tau)$ impulsni odziv pa dobijemo:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tau\mu(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} \tau\delta(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{\infty} t\delta(t-\tau)d\tau$$
$$y(t) = t\int_{0}^{\infty} \delta(t-\tau)d\tau = t \cdot 1 = t, t \geqslant 0,$$

odnosno tako dobijemo odziv sustava na jediničnu stepenicu. Uočimo svojstvo prosijavanja i da je impulsni odziv zaista odziv na impulsnu pobudu.

6.1 Zadaci za vježbu

Zadatak 6.1. Odredite odziv mirnog sustava na jediničnu skokovitu pobudu $\mu(t)$ opisanog impulsnim odzivom:

$$g(t) = \begin{cases} e^{-10t} & za \quad t \geqslant 0 \\ 0 & za \quad t < 0 \end{cases}.$$

Zadatak 6.2. Odredite odziv mirnog sustava na jediničnu skokovitu pobudu $\mu(t)$ opisanog impulsnim odzivom:

$$g(t) = \begin{cases} t & za \quad t \geqslant 0 \\ 0 & za \quad t < 0 \end{cases}.$$

Zadatak 6.3. Odredite odziv mirnog sustava na impulsnu pobudu $\delta(t)$ opisanog impulsnim odzivom:

$$g(t) = \begin{cases} e^{-2t} & za \quad t \geqslant 0 \\ 0 & za \quad t < 0 \end{cases}.$$

Poglavlje 7

Laplaceova transformacija

7.1 Laplaceova transformacija i njena svojstva

Jedna od transformacija, kojom se diferencijalne jednadžbe mogu transformirati u jednostavniju, algebarsku formu, naziva se Laplaceova transformacija. Ova transformacija pogodna je za sustave višeg reda jer omogućuje rješavanje diferencijalnih jednadžbi na jednostavan način. Definicija Laplaceove transformacije je:

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \tag{7.1}$$

gdje je s kompleksna varijabla.

Slika 7.1: Shematski prikaz rješenja diferencijalne jednadžbe

Na slici 7.1 prikazan je shematski prikaz rješavanja diferencijalne jednadžbe. Diferencijalne jednadžbe transformiraju se u algebarski oblik. Rješavamo algebarsku jednadžbu te inverznom transformacijom dobijemo rješenje diferencijalne jednadžbe.

Funkcija $x(t)$ naziva se original ili gornja funkcija, a funkcija $X(s)$ naziva se slika ili donja funkcija. Da bismo olakšali zapisivanje, mala slova neka predstavljaju originale (gornje funkcije), a velika slova neka predstavljaju slike (donje funkcije). Laplaceovu transformaciju skraćeno ćemo pisati na jedan od dva načina:

$$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(s) \text{ ili } X(s) = \mathscr{L}(x(t))$$

gdje je originalu $x(t)$ pridružena slika $X(s)$.

U nastavku ćemo navesti svojstva Laplaceove transformacije.

- **Linearnost Laplaceove transformacije:** Ako je:

$$x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; X(s)\;,\; y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s), \tag{7.2}$$

  tada vrijedi:

$$\alpha x(t) + \beta y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; \alpha X(s) + \beta Y(s). \tag{7.3}$$

- **Množenje varijable s konstantom:**

$$\begin{aligned} x(at) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; \tfrac{1}{a} X(\tfrac{s}{a}) \\ X(bs) &\bullet\!\!-\!\!\circ\; \tfrac{1}{b} x(\tfrac{t}{b}). \end{aligned} \tag{7.4}$$

- **Prigušenje originala $x(t)$:** Prigušenje originala odgovara pomakom slike ulijevo:

$$e^{-at} x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; X(s+a). \tag{7.5}$$

- **Teorem o pomaku originala:** Neka je $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; X(s)$ i $a > 0$. Pomak originalu udesno odgovara prigušenju slike:

$$x(t-a)\mu(t-a) \circ\!\!-\!\!\bullet\; e^{-as} X(s). \tag{7.6}$$

- **Deriviranje originala $x(t)$:** Za deriviranje originala $x(t)$ vrijedi:

$$\begin{aligned} x'(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; sX(s) - x(0) \\ x''(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) \\ &. \\ &. \\ &. \\ x^{(n)}(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; s^n X(s) - s^{n-1} x(0) - s^{n-2} x'(0) - ... - x^{(n-1)}(0). \end{aligned} \tag{7.7}$$

- **Deriviranje slike $x(t)$:** Deriviranje u frekvencijskoj domeni (s domeni) odgovara množenju s $-t$ u vremenskoj domeni:

$$\begin{aligned} (-t)x(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; X'(s) \\ . \quad & \quad . \quad\quad . \\ . \quad & \quad . \quad\quad . \\ . \quad & \quad . \quad\quad . \\ (-t)^n x(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; X^{(n)}(s). \end{aligned} \tag{7.8}$$

- **Integriranje originala:** Integriranje originala odgovara dijeljenju slike s kompleksnom varijablom s.

$$\int_0^t x(t)dt \circ\!\!-\!\!\bullet\; \frac{X(s)}{s}. \tag{7.9}$$

- **Integriranje slike:** Integriranje slike odgovara dijeljenju originala s vremenskom varijablom t.

$$\frac{x(t)}{t} \circ\!\!-\!\!\bullet\; \int_s^\infty X(s)ds. \tag{7.10}$$

- **Teorem o konvoluciji:** Konvolucija dvaju originala odgovara umnošku slika:

$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad Y(s) = G(s)U(s). \tag{7.11}$$

Prema navedenom teoremu konvolucije (7.11) definirajmo prijenosnu funkciju sustava $G(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}. \tag{7.12}$$

Prijenosna funkcija predstavlja opis sustava u Laplaceovoj domeni. To je ujedno i odziv sustava na *dirac* delta impuls $\delta(t)$, ali u Laplaceovoj domeni. Prema tome, prijenosna funkcija je Laplaceova transformacije impulsnog odziva sustava.

Tablica osnovnih Laplaceovih transformata nalazi se u poglavlju 13 PRILOG.

Primjer 7.1.1 Prema definiciji odredite Laplaceovu transformaciju sljedećih signala:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 5\mu(t) \\ x_2(t) &= 10\mu(t-3) \\ x_3(t) &= 2e^{-3.5t} \\ x_4(t) &= \cos 3t \\ x_5(t) &= \delta(t) + \delta(t-3) \\ x_6(t) &= 2t. \end{aligned}$$

Za sve navedene signale vrijedi da su jednaki 0 za $t < 0$.

Rješenje Definicija jednostrane Laplaceove transformacije (u nastavku Laplaceove transformacije) je:

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} x(t) dt.$$

Donja granica Laplaceove transformacije 0^- obuhvaća pobude oblika *dirac* delta signala. Za sve ostale signale granica se može postaviti u nulu jer se radi o kauzalnim signalima koji egzistiraju za $t \geq 0$. Laplaceova transformacija signala $x_1(t)$ je:

$$\begin{aligned} X_1(s) &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} x_1(t) dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} 5\mu(t) dt = 5 \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ X_1(s) &= -\frac{5}{s}\, e^{-st}\Big|_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{5}{s}\right) = \frac{5}{s}. \end{aligned}$$

Laplaceova transformacija signala $x_2(t)$ je:

$$\begin{aligned} X_2(s) &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} x_2(t) dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} 10\mu(t-3) dt = 10 \int_3^{\infty} e^{-st} dt \\ X_2(s) &= -\frac{10}{s}\, e^{-st}\Big|_3^{\infty} = 0 - \left(-\frac{10}{s} e^{-3s}\right) = \frac{10}{s} e^{-3s}. \end{aligned}$$

Signal $\mu(t-3)$ jednak je nuli za vrijeme $t < 3$. Prema tome, pomiće se donja granica integracije jer signal ne egzistira (jednak je nuli) za vrijeme $t < 3$.

Laplaceova transformacija signala $x_3(t)$ je:

$$X_3(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} x_3(t) dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} 2e^{-3.5t} dt = 2\int_{0}^{\infty} e^{-st} e^{-3.5t} dt$$
$$X_3(s) = 2\int_{0}^{\infty} e^{-(s+3.5)t} dt = -\frac{2}{s+3.5}\, e^{-(s+3.5)t}\Big|_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{2}{s+3.5}\right) = \frac{2}{s+3.5}.$$

Laplaceova transformacija signala $x_4(t)$ je:

$$X_4(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} x_4(t) dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\cos 3t dt = \int_{0}^{\infty} e^{-st}\cos 3t dt$$
$$X_4(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st}\cos 3t dt \left| \begin{array}{cc} u = e^{-st} & dv = \cos 3t\ dt \\ du = -se^{-st} dt & v = \frac{1}{3}\sin 3t \end{array} \right|$$
$$X_4(s) = e^{-st}\,\frac{1}{3}\sin 3t\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{3}s\int_{0}^{\infty} e^{-st}\sin 3t dt = 0 - 0 + \frac{1}{3}s\int_{0}^{\infty} e^{-st}\sin 3t dt$$
$$X_4(s) = \frac{1}{3}s\int_{0}^{\infty} e^{-st}\sin 3t dt \left| \begin{array}{cc} u = e^{-st} & dv = \sin 3t\ dt \\ du = -se^{-st} dt & v = -\frac{1}{3}\cos 3t \end{array} \right|$$
$$X_4(s) = \frac{1}{3}s\left(-e^{-st}\,\frac{1}{3}\cos 3t\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{3}s\int_{0}^{\infty} e^{-st}\cos 3t dt\right) =$$
$$X_4(s) = \frac{1}{3}s\left(-0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}s\int_{0}^{\infty} e^{-st}\cos 3t dt\right) = \frac{1}{9}s - \frac{1}{9}s^2 X_4(s)$$
$$X_4(s)\left(1 + \frac{1}{9}s^2\right) = \frac{1}{9}s / : \left(1 + \frac{1}{9}s^2\right)$$
$$X_4(s) = \frac{\frac{1}{9}s}{1 + \frac{1}{9}s^2} = \frac{s}{s^2+9}.$$

Laplaceova transformacija signala $x_5(t)$ je:

$$X_5(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} x_5(t) dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\left(\delta(t) + \delta(t-3)\right) dt$$
$$X_5(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\delta(t) dt + \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\delta(t-3) dt$$
$$X_5(s) = e^{-s\cdot 0}\int_{0^-}^{\infty} \delta(t) dt + e^{-3s}\int_{0^-}^{\infty} \delta(t-3) dt$$
$$X_5(s) = 1 + e^{-3s}.$$

Laplaceova transformacija signala $x_6(t)$ je:

$$
\begin{aligned}
X_6(s) &= \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}x_6(t)dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}2tdt = \int_{0}^{\infty} e^{-st}2tdt \\
X_6(s) &= 2\int_{0}^{\infty} e^{-st}tdt \left| \begin{array}{cc} u=t & dv=e^{-st}\,dt \\ du=dt & v=-\frac{1}{s}e^{-st} \end{array} \right| \\
X_6(s) &= 2\left(-t\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}dt\right) = 2\left(-0+0+\frac{1}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}dt\right) \\
X_6(s) &= -2\frac{1}{s^2}\,e^{-st}\Big|_0^{\infty} = -0-\left(-2\frac{1}{s^2}\right) = \frac{2}{s^2}.
\end{aligned}
$$

Primjer 7.1.2 Koristeći svojstvo prigušenja originala Laplaceove transformacije odredite Laplaceove transformate sljedećih signala:

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= e^{-3t}\mu(t) \\
x_2(t) &= e^{-2t}\sin \pi t \\
x_3(t) &= e^{t}t.
\end{aligned}
$$

Za sve navedene signale vrijedi da su jednaki 0 za $t < 0$.

Rješenje Pretpostavimo da znamo Laplaceove transformacije osnovnih signala (mogu se pročitati iz tablica Laplaceove transformacije koje se nalaze u poglavlju PRILOG 13). Laplaceova transformacija zadanih signala koje množi eksponencijalna funkcija je:

$$
\begin{aligned}
&\mu(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \tfrac{1}{s} \\
&\sin \pi t \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \tfrac{\pi}{s^2+\pi^2} \\
&t \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \tfrac{1}{s^2}.
\end{aligned}
$$

Prigušenje originala odgovara pomaku kompleksne varijable s ulijevo za parametar prigušenja a:

$$
e^{-at}x(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; X(s+a).
$$

Koristeći ovo svojstvo vrijedi:

$$
\begin{aligned}
&x_1(t) = e^{-3t}\mu(t), a = 3 \\
&\;e^{-3t}\mu(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \tfrac{1}{s+a} = \tfrac{1}{s+3} \\
&x_2(t) = e^{-2t}\sin \pi t, a = 2 \\
&\;e^{-2t}\sin \pi t \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \tfrac{\pi}{(s+a)^2+\pi^2} = \tfrac{\pi}{(s+2)^2+\pi^2} \\
&x_3(t) = e^{t}t, a = -1 \\
&\;e^{t}t \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; \tfrac{1}{(s+a)^2} = \tfrac{1}{(s-1)^2}.
\end{aligned}
$$

Primjer 7.1.3 Koristeći svojstvo pomaka originala ulijevo odredite Laplaceove transformacije sljedećih signala:

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= 10t\mu(t-2) \\
x_2(t) &= e^{-2t}\mu(t-3) \\
x_3(t) &= \left(t^2+4t+7\right)\mu(t-1).
\end{aligned}
$$

Za sve navedene signale vrijedi da su jednaki 0 za $t < 0$.

Rješenje Pomak originala ulijevo odgovara prigušenju Laplaceovog transformata:

$$x(t-b)\mu(t-b) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-bs}X(s).$$

Iz definicije pomaka originala uočavamo da ćemo sve vremenske signale morati prilagoditi pomaku step signala. Za signal $x_1(t)$ vrijedi:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 10t\mu(t-2) = 10\,(t-2+2)\,\mu(t-2) \\ x_1(t) &= 10\,(t-2)\,\mu(t-2) + 20\mu(t-2). \end{aligned}$$

Rastavimo sada signal $x_1(t)$ na zbroj signala za koje znamo naći Laplaceove transformacije:

$$\begin{aligned} &10t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tfrac{10}{s^2} \;\Rightarrow\; 10\,(t-2)\,\mu(t-2) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-2s}\tfrac{10}{s^2} \\ &20 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tfrac{20}{s} \;\Rightarrow\; 20\mu(t-2) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-2s}\tfrac{20}{s} \\ &x_1(t) = 10\,(t-2)\,\mu(t-2) + 20\mu(t-2) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X_1(s) = e^{-2s}\left(\tfrac{10}{s^2} + \tfrac{20}{s}\right). \end{aligned}$$

Za signal $x_2(t)$ vrijedi:

$$x_2(t) = e^{-2t}\mu(t-3) = e^{-2(t-3+3)}\mu(t-3) = e^{-6}e^{-2(t-3)}\mu(t-3).$$

Podesimo sada signal $x_2(t)$ prema pomacima jediničnih stepenica i nađimo Laplaceovu transformaciju:

$$\begin{aligned} &e^{-2t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tfrac{1}{s+2} \;\Rightarrow\; e^{-2(t-3)}\mu(t-3) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-3s}\tfrac{1}{s+2} \\ &x_2(t) = e^{-6}e^{-2(t-3)}\mu(t-3) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X_2(s) = e^{-6}e^{-3s}\tfrac{1}{s+2} = e^{-3(s+2)}\tfrac{1}{s+2}. \end{aligned}$$

Zadatak se može riješiti i na drugi način. Koristit ćemo najprije svojstvo o pomaku originala ulijevo, a zatim svojstvo o prigušenju originala:

$$\begin{aligned} &\mu(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tfrac{1}{s} \;\Rightarrow\; \mu(t-3) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-3s}\tfrac{1}{s} \\ &x_2(t) = e^{-2t}\mu(t-3) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X_2(s) = e^{-3(s+2)}\tfrac{1}{s+2}. \end{aligned}$$

Ovdje je prigušena eksponencijalna funkcija uzrokovala pomak kompleksne varijable s za 2.

Za signal $x_3(t)$ vrijedi:

$$\begin{aligned} x_3(t) &= (t^2+4t+7)\,\mu(t-1) = \left(\left((t-1)^2+2t-1\right)+4t+7\right)\mu(t-1) \\ x_3(t) &= \left((t-1)^2+6t+6\right)\mu(t-1) = \left((t-1)^2+6\,(t-1)+6+6\right)\mu(t-1) \\ x_3(t) &= \left((t-1)^2+6\,(t-1)+12\right)\mu(t-1). \end{aligned}$$

Rastavimo sada signal $x_3(t)$ na zbroj signala za koje znamo naći Laplaceove transformacije:

$$\begin{aligned} &t^2 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tfrac{2}{s^3} \;\Rightarrow\; (t-1)^2\mu(t-1) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-s}\tfrac{2}{s^3} \\ &6t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tfrac{6}{s^2} \;\Rightarrow\; 6\,(t-1)\,\mu(t-1) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-s}\tfrac{6}{s^2} \\ &12\mu(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tfrac{12}{s} \;\Rightarrow\; 12\mu(t-1) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-s}\tfrac{12}{s} \\ &x_3(t) = \left((t-1)^2+6\,(t-1)+12\right)\mu(t-1) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X_3(s) = e^{-s}\left(\tfrac{2}{s^3}+\tfrac{6}{s^2}+\tfrac{12}{s}\right). \end{aligned}$$

Primjer 7.1.4 Koristeći svojstvo deriviranja originala odredite Laplaceove transformacije sljedećih signala:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \tfrac{d}{dt}(\cos 4t) \\ x_2'(t) &= \tfrac{d}{dt}(t) \\ x_3'(t) &= \tfrac{d}{dt}(e^{-3t}). \end{aligned}$$

Za sve navedene signale vrijedi da su jednaki 0 za $t < 0$.

Rješenje Svojstvo deriviranja originala može se opisati sljedećim relacijama:

$$\begin{aligned} x'(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ sX(s) - x(0) \\ x''(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ s^2X(s) - sx(0) - x'(0) \\ &\vdots \\ x^{(n)}(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ s^nX(s) - s^{n-1}x(0) - s^{n-2}x'(0) - ... - x^{(n-1)}(0). \end{aligned}$$

Derivirani signali dani u zadatku su:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \cos 4t \\ x_2(t) &= t \\ x_3(t) &= e^{-3t}. \end{aligned}$$

Njihovi Laplaceovi transformati su:

$$\begin{aligned} x_1(t) = \cos 4t &\circ\!\!-\!\!\bullet\ X_1(s) = \tfrac{s}{s^2+16} \\ x_2(t) = t &\circ\!\!-\!\!\bullet\ X_2(s) = \tfrac{1}{s^2} \\ x_3(t) = e^{-3t} &\circ\!\!-\!\!\bullet\ X_3(s) = \tfrac{1}{s+3}. \end{aligned}$$

Signali u trenutku $t = 0$ poprimaju sljedeće vrijednosti:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= \cos 0 = 1 \\ x_2(0) &= 0 \\ x_3(0) &= e^{-3 \cdot 0} = 1. \end{aligned}$$

Koristeći svojstvo deriviranja originala dobiveni su sljedeći Laplaceovi transformati:

$$\begin{aligned} x_1'(t) = \tfrac{d}{dt}(\cos 4t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ sX_1(s) - x_1(0) = \tfrac{s^2}{s^2+16} - 1 = \tfrac{-16}{s^2+16} \\ x_2'(t) = \tfrac{d}{dt}(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ sX_2(s) - x_2(0) = \tfrac{s}{s^2} - 0 = \tfrac{1}{s} \\ x_3'(t) = \tfrac{d}{dt}(e^{-3t}) &\circ\!\!-\!\!\bullet\ sX_3(s) - x_3(0) = \tfrac{s}{s+3} - 1 = \tfrac{-3}{s+3}. \end{aligned}$$

Provjerimo usput svojstvo deriviranja originala:

$$\begin{aligned} x_1'(t) = \tfrac{d}{dt}(\cos 4t) = -4\sin 4t &\circ\!\!-\!\!\bullet\ -4\tfrac{4}{s^2+16} = \tfrac{-16}{s^2+16} \\ x_2'(t) = \tfrac{d}{dt}(t) = 1 &\circ\!\!-\!\!\bullet\ \tfrac{1}{s} \\ x_3'(t) = \tfrac{d}{dt}(e^{-3t}) = -3e^{-3t} &\circ\!\!-\!\!\bullet\ -3\tfrac{1}{s+3} = \tfrac{-3}{s+3}. \end{aligned}$$

Dobili smo iste rezultate.

Primjer 7.1.5 Koristeći svojstvo integriranja originala odredite Laplaceove transformacije sljedećih signala:

$$\begin{array}{l} \int_0^t x_1(t)dt = \int_0^t 2tdt \\ \int_0^t x_2(t)dt = \int_0^t \cos 2tdt \\ \int_0^t x_3(t)dt = \int_0^t e^{-2t}dt. \end{array}$$

Za sve navedene signale vrijedi da su jednaki 0 za $t < 0$.

Rješenje Svojstvo integriranja originala može se opisati sljedećom relacijom:

$$\int_0^t x(t)dt \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{X(s)}{s}.$$

Integrirani signali dani u zadatku su:

$$\begin{array}{l} x_1(t) = 2t \\ x_2(t) = \cos 2t \\ x_3(t) = e^{-2t}. \end{array}$$

Njihovi Laplaceovi transformati su:

$$\begin{array}{l} 2t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{2}{s^2} \\ \cos 2t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{s}{s^2+4} \\ e^{-2t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s+2}. \end{array}$$

Koristeći svojstvo integriranja originala dobiveni su sljedeći Laplaceovi transformati:

$$\begin{array}{l} \int_0^t x_1(t)dt = \int_0^t 2tdt \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{X_1(s)}{s} = \frac{2}{s^3} \\ \int_0^t x_2(t)dt = \int_0^t \cos 2tdt \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{X_2(s)}{s} = \frac{1}{s^2+4} \\ \int_0^t x_3(t)dt = \int_0^t e^{-2t}dt \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{X_3(s)}{s} = \frac{1}{s}\frac{1}{s+2}. \end{array}$$

Provjerite svojstvo integriranja originala.

Primjer 7.1.6 Koristeći svojstvo deriviranja slike odredite Laplaceove transformacije sljedećih signala:

$$\begin{array}{l} x_1(t) = t\cos 2t \\ x_2(t) = t^2 e^{-2t}. \end{array}$$

Za sve navedene signale vrijedi da su jednaki 0 za $t < 0$.

Rješenje Svojstvo deriviranja slike može se opisati sljedećom relacijom:

$$\begin{aligned}&(-t)x(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X'(s)\\&t^2x(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X''(s)\\&.\\&.\\&.\\&(-t)^nx(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X^{(n)}(s)\end{aligned}$$

U signalu $x_1(t)$, $\cos 2t$ množi t pa je potrebno samo jednom derivirati sliku signala $\cos 2t$. Obratite pažnju na predznak. Naime, ako vrijedi:

$$(-t)x(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X'(s),$$

onda vrijedi:

$$tx(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -X'(s).$$

Laplaceova transformacija signala $\cos 2t$ je:

$$\cos 2t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tfrac{s}{s^2+4}.$$

Ako prethodni transformat deriviramo i pomnožimo s -1, dobit ćemo Laplaceovu transformaciju signala $x_1(t)$:

$$\begin{aligned}-\tfrac{d}{ds}\left(\tfrac{s}{s^2+4}\right) &= -\tfrac{s^2+4-s(2s)}{(s^2+4)^2} = \tfrac{s^2-4}{(s^2+4)^2}\\x_1(t) = &\ t\cos 2t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X_1(s) = \tfrac{s^2-4}{(s^2+4)^2}.\end{aligned}$$

U signalu $x_2(t)$, e^{-2t} množi t^2 pa je potrebno dva puta derivirati sliku signala e^{-2t}. Obratite pažnju na predznak.

Laplaceova transformacija signala e^{-2t} je:

$$e^{-2t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tfrac{1}{s+2}.$$

Ako prethodni transformat deriviramo dva puta, dobit ćemo Laplaceovu transformaciju signala $x_2(t)$:

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{ds}\left(\tfrac{1}{s+2}\right) = \tfrac{-1}{(s+2)^2}\\&\tfrac{d}{ds}\left(\tfrac{-1}{(s+2)^2}\right) = \tfrac{2(s+2)}{(s+2)^4} = \tfrac{2}{(s+2)^3}\\&x_2(t) = t^2e^{-2t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X_2(s) = \tfrac{2}{(s+2)^3}.\end{aligned}$$

Primjer 7.1.7 Odredite Laplaceovu transformaciju konvolucije dvaju signala:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \cos 3t\\x_2(t) &= e^{-3t}.\end{aligned}$$

Za sve navedene signale vrijedi da su jednaki 0 za $t < 0$.

Rješenje Konvolucija dvaju signala u vremenskoj domeni reprezentira se umnoškom slika u Laplaceovoj domeni:

$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad Y(s) = G(s)U(s).$$

Laplaceova transformacija signala $x_1(t)$ i $x_2(t)$ je:

$$\begin{array}{l} \cos 3t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{s}{s^2+9} \\ e^{-3t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s+3}. \end{array}$$

Laplaceova transformacija konvolucije signala $x_1(t)$ i $x_2(t)$ je:

$$x_1(t) * x_2(t) = \cos 3t * e^{-3t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X_1(s)X_2(s) = \frac{s}{s^2+9}\frac{1}{s+3}.$$

Primjer 7.1.8 Odredite Laplaceovu transformaciju sljedećih signala:

$$\begin{array}{l} x_1(t) = te^{-2t}\cos 3t \\ x_2(t) = (t-4)^3 e^{-4t}\mu(t-4) \\ x_3(t) = \int_0^t t^2 e^{-4t}\sin 2t dt \\ x_4(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos 3\tau \sin(t-\tau)d\tau. \end{array}$$

Za sve navedene signale vrijedi da su jednaki 0 za $t < 0$.

Rješenje Navedene signale transformirat ćemo u Laplaceovu domenu korištenjem svih dosad navedenih svojstava. U signalu $x_1(t)$ najprije transformiramo $\cos 3t$:

$$\cos 3t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{s}{s^2+9}.$$

Množenjem signala $\cos 3t$ s t deriviramo sliku signala $\cos 3t$ i množimo s -1:

$$t\cos 3t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+9}\right) = -\frac{s^2+9-2s^2}{(s^2+9)^2} = \frac{s^2-9}{(s^2+9)^2}.$$

Prigušenjem originala pomiče se kompleksna varijabla s u transformatu:

$$x_1(t) = e^{-2t}t\cos 3t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X_1(s) = \frac{(s+2)^2-9}{\left((s+2)^2+9\right)^2}.$$

U signalu $x_2(t)$ najprije transformiramo t^3:

$$t^3 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{6}{s^4}.$$

Pomakom originala udesno, prigušuje se slika:

$$(t-4)^3\mu(t-4) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-4s}\frac{6}{s^4}.$$

Prigušenjem originala pomiče se kompleksna varijabla s u transformatu:

$$x_2(t) = e^{-4t}(t-4)^3\mu(t-4) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad e^{-4(s+4)}\frac{6}{(s+4)^4}.$$

U signalu $x_3(t)$ najprije transformiramo $\sin 2t$:

$$\sin 2t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{2}{s^2+4}.$$

Množenjem signala $\sin 2t$ s t^2 dva puta deriviramo sliku signala $\sin 2t$:

$$\begin{aligned}
t\sin 2t \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad -\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) = -\frac{-4s}{(s^2+4)^2} = \frac{4s}{(s^2+4)^2}\\
t^2\sin 2t \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad -\frac{d}{ds}\left(\frac{4s}{(s^2+4)^2}\right) = -\frac{4\left(s^2+4\right)^2-16s^2\left(s^2+4\right)}{(s^2+4)^4} = \frac{12s^2-16}{(s^2+4)^3}.
\end{aligned}$$

Prigušenjem originala pomiče se kompleksna varijabla s u transformatu:

$$e^{-4t}t^2\sin 2t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{12(s+4)^2-16}{\left((s+4)^2+4\right)^3}.$$

Integriranje originala rezultira dijeljenjem slike Laplaceove transformacije podintegralne funkcije sa s:

$$x_3(t) = \int_0^t t^2e^{-4t}\sin 2tdt \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X_3(s) = \frac{1}{s}\frac{12(s+4)^2-16}{\left((s+4)^2+4\right)^3}.$$

U signalu $x_4(t)$ pojavljuje se konvolucija dvaju signala $\cos 3t$ i $\sin t$ čiji su Laplaceovi transformati:

$$\begin{aligned}
\cos 3t \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{s}{s^2+9}\\
\sin t \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s^2+1}.
\end{aligned}$$

Laplaceova transformacija konvolucije signala $\cos 3t$ i $\sin t$ je:

$$x_4(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\cos 3\tau\sin(t-\tau)d\tau \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X_4(s) = \frac{s}{s^2+9}\frac{1}{s^2+1}.$$

Primjer 7.1.9 Odziv mirnog sustava na jediničnu stepenicu je:

$$y(t) = 2 - 2e^{-2t} + te^{-2t}, t \geq 0.$$

Odredite prijenosnu funkciju sustava.

Rješenje Prijenosna funkcija definirana je omjerom Laplaceovih transformacija izlaza i ulaza sustava:

$$Y(s) = G(s)U(s) \Rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}.$$

Laplaceova transformacija izlaza je:

$$\begin{aligned}
y(t) = 2 - 2e^{-2t} + te^{-2t} \quad &\circ\!\!-\!\!\bullet \quad Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2}\\
Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2} &= \frac{2(s+2)^2-2s(s+2)+s}{s(s+2)^2} = \frac{2\left(s^2+4s+4\right)-\left(2s^2+4s\right)+s}{s(s+2)^2}\\
Y(s) &= \frac{5s+8}{s(s+2)^2}.
\end{aligned}$$

Laplaceova transformacija ulaznog signala $\mu(t)$ je:

$$u(t) = \mu(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad U(s) = \tfrac{1}{s}.$$

Prijenosna funkcija sustava je:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{5s+8}{s(s+2)^2}}{\frac{1}{s}} = \frac{5s+8}{(s+2)^2}.$$

Primjer 7.1.10 Sustav je opisan sljedećom diferencijalnom jednadžbom:

$$y'''(t) + 0.1y''(t) + 2.1y'(t) + y(t) = u(t).$$

Početni su uvjeti sustava $y''(0) = 5$, $y'(0) = 0$, $y(0) = 2$. Odredite prijenosnu funkciju sustava.

Rješenje Da bismo sustav, koji je opisan diferencijalnom jednadžbom prezentirali prijenosnom funkcijom, potrebno je koristiti svojstvo deriviranja originala. Prije svega potrebno je znati definiciju prijenosne funkcije. Prijenosna funkcija predstavlja matematički model sustava, a definira se kao omjer izlaza mirnog sustava u Laplaceovoj domeni i ulaza mirnog sustava u Laplaceovoj domeni. Naglasak je stavljen na miran sustav. Prema tome, početni su uvjeti ovdje nepotrebni za izračun prijenosne funkcije jer su svi početni uvjeti mirnog sustava jednaki nuli. Prema tome, derivacije izlaza transformiraju se prema:

$$\begin{aligned}
&y(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad Y(s)\\
&y'(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad sY(s) - y(0) = sY(s) - 0 = sY(s)\\
&y''(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - 0 - 0 = s^2Y(s)\\
&y'''(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) = s^3Y(s) - 0 - 0 - 0 = s^3Y(s).
\end{aligned}$$

Na temelju prethodnog računa, za sustav opisan diferencijalnom jednadžbom, slijedi prijenosna funkcija:

$$\begin{gathered}
y'''(t) + 0.1y''(t) + 2.1y'(t) + y(t) = u(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet\\
\circ\!\!-\!\!\bullet \quad s^3Y(s) + 0.1s^2Y(s) + 2.1sY(s) + Y(s) = U(s)\\
(s^3 + 0.1s^2 + 2.1s + 1)\,Y(s) = U(s) / : U(s) / : (s^3 + 0.1s^2 + 2.1s + 1)\\
G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^3 + 0.1s^2 + 2.1s + 1}.
\end{gathered}$$

Primjer 7.1.11 Sustav je opisan sljedećom diferencijalnom jednadžbom:

$$y''(t) + 1.1y'(t) + 2.5y(t) = 2u(t).$$

Početni su uvjeti sustava $y'(0) = -1$, $y(0) = 1$. Odredite izlaz $Y(s)$ sustava u Laplacevoj domeni ako je na ulaz u sustav dovedena pobuda tipa jedinična rampa.

Rješenje U ovom se zadatku ne traži prijenosna funkcija sustava kao u prethodnom, već izlaz sustava u Laplaceovoj domeni. U ovom slučaju potrebno je uzeti u obzir i početne uvjete pa vrijedi:

$$\begin{aligned}
y(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; Y(s) \\
y'(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; sY(s) - y(0) = sY(s) - 1 \\
y''(t) &\circ\!\!-\!\!\bullet\; s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s + 1.
\end{aligned}$$

Prethodni izvod primijenimo na diferencijalnu jednadžbu sustava pa dobijemo:

$$\begin{aligned}
&y''(t) + 1.1y'(t) + 2.5y(t) = 2u(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet \\
&s^2Y(s) - s + 1 + 1.1\,(sY(s) - 1) + 2.5Y(s) = 2U(s) \Rightarrow \\
&(s^2 + 1.1s + 2.5)\,Y(s) - s - 0.1 = 2U(s) \Rightarrow \\
&(s^2 + 1.1s + 2.5)\,Y(s) = 2U(s) + s + 0.1 / : (s^2 + 1.1s + 2.5) \\
&Y(s) = \tfrac{2U(s)}{s^2+1.1s+2.5} + \tfrac{s+0.1}{s^2+1.1s+2.5}.
\end{aligned}$$

Ulaz u sustav je jedinična rampa:

$$u(t) = t \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; U(s) = \tfrac{1}{s^2}.$$

Uvrstimo li to u relaciju za $Y(s)$, dobit ćemo konačno rješenje:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{2}{s^2\,(s^2 + 1.1s + 2.5)}}_{\text{odziv mirnog sustava}} + \underbrace{\frac{s + 0.1}{s^2 + 1.1s + 2.5}}_{\text{odziv nepobuđenog sustava}}.$$

7.1.1 Zadaci za vježbu

Zadatak 7.1.1 Prema definiciji odredite Laplaceovu transformaciju sljedećih signala:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= 15\mu(t) \\
x_2(t) &= 14\mu(t-5) \\
x_3(t) &= 2e^{2t} \\
x_4(t) &= \sin 4t \\
x_5(t) &= \delta(t-1) + \delta(t+3) \\
x_6(t) &= t^2.
\end{aligned}$$

Zadatak 7.1.2 Koristeći svojstvo prigušenja originala Laplaceove transformacije odredite Laplaceove transformate sljedećih signala:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= 2e^{-5t}\mu(t) \\
x_2(t) &= e^{-2t}\cos \pi t \\
x_3(t) &= e^{-t}t^2.
\end{aligned}$$

Zadatak 7.1.3 Koristeći svojstvo pomaka originala u lijevo odredite Laplaceove transformacije sljedećih signala:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= t^2\mu(t-2) \\ x_2(t) &= e^{-4t}\mu(t-1) \\ x_3(t) &= (t+4)\,\mu(t-2). \end{aligned}$$

Zadatak 7.1.4 Koristeći svojstvo deriviranja originala odredite Laplaceove transformacije sljedećih signala:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \tfrac{d}{dt}\left(\sin 2t\right) \\ x_2'(t) &= \tfrac{d}{dt}\left(t^2\right) \\ x_3'(t) &= \tfrac{d}{dt}\left(e^{3t}\right). \end{aligned}$$

Zadatak 7.1.5 Koristeći svojstvo integriranja originala odredite Laplaceove transformacije sljedećih signala:

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^t x_1(t)dt &= \textstyle\int_0^t t^2 dt \\ \textstyle\int_0^t x_2(t)dt &= \textstyle\int_0^t \sin 2t dt \\ \textstyle\int_0^t x_3(t)dt &= \textstyle\int_0^t e^{-5t} dt. \end{aligned}$$

Zadatak 7.1.6 Koristeći svojstvo deriviranja slike odredite Laplaceove transformacije sljedećih signala:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= t\sin 2t \\ x_2(t) &= t^3 e^{-t}. \end{aligned}$$

Zadatak 7.1.7 Odredite Laplaceovu transformaciju konvolucije dvaju signala:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \sin 3t \\ x_2(t) &= t^2. \end{aligned}$$

Zadatak 7.1.8 Odredite Laplaceovu transformaciju sljedećih signala:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= t^2 e^{-3t}\sin 4t \\ x_2(t) &= (t-2)^4 e^{-2t}\mu(t-2) \\ x_3(t) &= \textstyle\int_0^t te^{-4t}\sin 3t dt \\ x_4(t) &= \textstyle\int_{-\infty}^{\infty}\sin 3\tau\sin(t-\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Zadatak 7.1.9 Odziv mirnog sustava na jediničnu rampu je:

$$y(t) = 12t - 10 - 2e^{-2t} - 2e^{-3t} + 2te^{-3t}, t \geq 0.$$

Odredite prijenosnu funkciju sustava.

Zadatak 7.1.10 Sustav je opisan sljedećom diferencijalnom jednadžbom:

$$y'''(t) + 2.2y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = 4u(t).$$

Početni su uvjeti sustava $y''(0) = 2$, $y'(0) = 0$, $y(0) = 2$. Odredite prijenosnu funkciju sustava.

Zadatak 7.1.11 Sustav je opisan sljedećom diferencijalnom jednadžbom:

$$y''(t) + 3y'(t) + 4y(t) = 2u(t).$$

Početni su uvjeti sustava $y'(0) = -1$, $y(0) = 1$. Odredite izlaz $Y(s)$ sustava u Laplacevoj domeni ako je na ulaz u sustav dovedena pobuda tipa jedinična stepenica.

7.2 Inverzna Laplaceova transformacija

Da bismo dobili rješenje diferencijalne jednadžbe potrebno je algebarski izraz, koji smo dobili Laplaceovom transformacijom, transformirati u pogodan oblik za inverznu Laplaceovu transformaciju. Ako je $X(s)$ slika originala $x(t)$, tada je i $x(t)$ original slike $X(s)$. Definicija inverzne Laplaceove transformacije je:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\omega \to \infty} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} X(s) e^{st} ds. \tag{7.13}$$

Definicija (7.13) presložena je za izračun vremenskog signala $x(t)$ te ćemo pokazati druge, jednostavnije načine. Problem inverzne Laplaceove transformacije znatno je složeniji od problema Laplaceove transformacije.

Neka je prijenosna funkcija sustava u Laplaceovoj domeni predstavljena kao racionalna funkcija:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0}, n \geqslant m. \tag{7.14}$$

Racionalnu funkciju (7.14) potrebno je rastaviti na proste razlomke. Ovaj je problem posebno jednostavan ukoliko su sve nultočke polinoma nazivnika $Q(s)$ realne i jednostruke. Nultočke polinoma nazivnika $Q(s)$ prijenosne funkcije predstavljaju polove sustava (označavat ćemo ih s p_i), a nultočke polinoma brojnika $P(s)$ prijenosne funkcije predstavljaju nule sustava (označavat ćemo ih s n_i).

U nastavku teksta koristit ćemo samo termine nule i polovi sustava. Ako su polovi prijenosne funkcije (7.14) jednostruki i realni, tada se racionalna prijenosna funkcija $G(s) = P(s)/Q(s)$ može napisati u obliku:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{K_1}{s - p_1} + \frac{K_2}{s - p_2} + ... + \frac{K_n}{s - p_n}. \tag{7.15}$$

Inverzna transformacija razlomljene racionalne funkcije $G(s)$ je eksponencijalna funkcija:

$$g(t) = K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + ... + K_n e^{p_n t}. \tag{7.16}$$

Koeficijenti $K_1, K_2, ..., K_n$ mogu se dobiti prema sljedećoj relaciji:

$$K_k = \lim_{s \to p_k} \frac{P(s)(s-p_k)}{Q(s)}, k = 1, ..., n. \tag{7.17}$$

Ovakav razvoj racionalne funkcije na proste razlomke u literaturi se naziva *Heavisideov* razvoj. To je samo jedan od načina kako se mogu odrediti koeficijenti $K_1, K_2, ..., K_n$. Sljedeći način temelji se na izjednačavanju koeficijenata uz iste potencije kompleksne varijable s:

$$\begin{aligned}
&\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0} = \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2} + ... + \frac{K_n}{s-p_n} \\
&\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)} = \frac{K_1}{s-p_1} + ... + \frac{K_n}{s-p_n} / (s-p_1)\cdots(s-p_n) \\
&b_m s^m + ... + b_1 s + b_0 = K_1(s-p_2)\cdots(s-p_n) + ... + K_n(s-p_1)\cdots(s-p_{n-1}).
\end{aligned} \tag{7.18}$$

Ako $G(s)$ ima kompleksne polove, tada se racionalna funkcija rastavlja kao ($p_{1,2} = -\sigma \mp j\omega$):

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0} = \frac{K_1 + K_2 s}{(s+\sigma+j\omega)(s+\sigma-j\omega)} + ... + \frac{K_n}{s-p_n}. \tag{7.19}$$

Ako $G(s)$ ima dvostruke, trostruke, četverostruke i višestruke polove, tada se racionalna funkcija rastavlja kao:

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + ... + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + ... + a_1 s + a_0} = \frac{K_{1,1}}{s-p_1} + ... + \frac{K_{1,r}}{(s-p_1)^r} + ... + \frac{K_n}{s-p_n}, \tag{7.20}$$

gdje je r višestrukost pola. Koeficijenti višestrukih polova relacije (7.20) mogu se dobiti na sljedeći način:

$$K_{1,i} = \frac{1}{(r-i)!} \lim_{s \to p_1} \left\{ \frac{d^{r-i}}{ds^{r-i}} \left[(s-p_1)^r \frac{P(s)}{Q(s)} \right] \right\}, i = r, r-1, ..., 2, 1 \tag{7.21}$$

U slučaju da imamo više višestrukih polova, istom analogijom kao i u prethodnom primjeru mogu se dobiti svi koeficijenti rastava prijenosne funkcije na proste razlomke. Nakon rastavljanja racionalne funkcije na proste razlomke inverzna Laplaceova transformacija dobije se korištenjem tablice Laplaceove transformacije koja se nalazi u poglavlju 13. PRILOG.

Primjer 7.2.1 Odredite inverznu Laplaceovu transformaciju sljedećih transformata:

$$\begin{aligned}
X_1(s) &= \tfrac{2}{s+2} \\
X_2(s) &= \tfrac{1}{(s+1)^2} \\
X_3(s) &= \tfrac{s+1}{s^2+s+2} \\
X_4(s) &= \tfrac{s+1}{s^2}.
\end{aligned}$$

Rješenje Svi zadaci ovog tipa mogu se riješiti korištenjem tablica Laplaceove transformacije i poznavajući svojstva Laplaceove transformacije. Transformat $X_1(s)$ prema tablici odgovara Laplaceovom transformatu eksponencijalne funkcije pa prema tome vrijedi:

$$X_1(s) = \tfrac{2}{s+2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad x_1(t) = 2e^{-2t}.$$

Transformat $X_2(s)$ ne može se pronaći u tablici Laplaceove transformacije, ali poznato je iz prijašnjih tablica da vrijedi:

$$\tfrac{1}{s^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad t.$$

Ako u transformatu imamo pomak varijable za 1 ulijevo, to odgovara prigušenju originalnog signala (originalan signal je t). Prema tome, vrijedi:

$$X_2(s) = \tfrac{1}{(s+1)^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad x_2(t) = e^{-t}t.$$

Transformat $X_3(s)$ također se ne može pronaći u tablici Laplaceove transformacije. U ovom slučaju najprije je potrebno izračunati polove sustava (karakteristične vrijednosti sustava). Polovi sustava nultočke su nazivnika Laplaceovog transformata. Za transformat $X_3(s)$ vrijedi da su polovi:

$$s^2 + s + 2 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Polovi su konjugirano kompleksni što upućuje na to da će original biti sinus i kosinus signal. S obzirom da polovi imaju i realnu komponentu, zaključujemo da će sinus i kosinus signali biti prigušeni. Transformat $X_3(s)$ najprije je potrebno transformirati u pogodan oblik na način da se dio nazivnika svede na potpuni kvadrat:

$$X_3(s) = \tfrac{s+1}{s^2+s+2} = \tfrac{s+1}{s^2+s+\frac{1}{4}+\frac{7}{4}} = \tfrac{s+1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$$
$$X_3(s) = \tfrac{s+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} = \tfrac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} + \tfrac{\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}.$$

Iz rastavljenog transformata uočavamo kružnu frekvenciju ω i parametar eksponencijalne funkcije jer vrijedi:

$$\begin{aligned}
\cos\omega t &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tfrac{s}{s^2+\omega^2} \\
\sin\omega t &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tfrac{\omega}{s^2+\omega^2} \\
e^{-at}\cos\omega t &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2} \\
e^{-at}\sin\omega t &\quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \tfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}.
\end{aligned}$$

Prema tome, vrijedi da je $\omega = \frac{\sqrt{7}}{2}$, a parametar eksponencijalne funkcije $a = \frac{1}{2}$. Nadalje, vrijedi:

$$X_3(s) = \tfrac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} + \tfrac{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} = \tfrac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}} + \tfrac{1}{\sqrt{7}}\tfrac{\frac{\sqrt{7}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}$$
$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$
$$x_3(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\tfrac{\sqrt{7}}{2}t + \tfrac{1}{\sqrt{7}}\sin\tfrac{\sqrt{7}}{2}t\right).$$

Transformat $X_4(s)$ najprije je potrebno svesti na zbroj dvaju transformata:

$$X_4(s) = \frac{s+1}{s^2} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}.$$

Iz tablica se može izračunati:

$$\begin{array}{lcl} \frac{1}{s} & \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ & \mu(t) \\ \frac{1}{s^2} & \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ & t. \end{array}$$

Zbog linearnosti Laplaceove transformacije vrijedi:

$$X_4(s) = \tfrac{s+1}{s^2} \quad \bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ \quad x_4(t) = \mu(t) + t.$$

Primjer 7.2.2 Odredite impulsni odziv sustava:

$$G(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Rješenje Impulsni odziv sustava je odziv sustava na *dirac* impuls $\delta(t)$. Za *dirac* impuls $\delta(t)$ vrijedi:

$$u(t) = \delta(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad U(s) = 1.$$

Koristeći definiciju prijenosne funkcije vrijedi:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} / U(s) \Rightarrow Y(s) = G(s)U(s).$$

a za konkretan sustav i pobudu:

$$Y(s) = G(s) \cdot 1 = G(s).$$

Možemo zaključiti da je inverzna Laplaceova transformacija prijenosne funkcije $\delta(t)$ sustava jednaka impulsnom odzivu sustava:

$$G(s) = \tfrac{1}{s+1} \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad g(t) = e^{-t}.$$

Primjer 7.2.3 Odredite odziv sustava:

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

na jediničnu skokovitu pobudu $u(t) = \mu(t)$.

Rješenje Za jediničnu skokovitu pobudu vrijedi:

$$u(t) = \mu(t) \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad U(s) = \tfrac{1}{s}.$$

Koristeći definiciju prijenosne funkcije vrijedi:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}/U(s) \Rightarrow Y(s) = G(s)U(s),$$

a za konkretan sustav i pobudu:

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{1}{s+1}\frac{1}{s}.$$

S obzirom da je odziv složenijeg tipa i nije ga moguće direktno (bez tablica) inverznom Laplaceovom transformacijom transformirati u vremensko područje, koristit ćemo Heavisideov razvoj na proste razlomke:

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}.$$

Polovi od $Y(s)$ su:

$$\begin{aligned}
&s(s+1) = 0 \Rightarrow s = 0 \wedge s+1 = 0\\
&s_1 = 0, s_2 = -1.
\end{aligned}$$

Odredimo sada koeficijente A i B:

$$\begin{aligned}
&Y(s) = \tfrac{1}{s}\tfrac{1}{s+1} = \tfrac{A}{s} + \tfrac{B}{s+1}\\
&A = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \tfrac{s}{s(s+1)} = \lim_{s\to 0} \tfrac{1}{(s+1)} = 1\\
&B = \lim_{s\to -1} (s+1)\,Y(s) = \lim_{s\to -1} \tfrac{s+1}{s(s+1)} = \lim_{s\to -1} \tfrac{1}{s} = -1.
\end{aligned}$$

Vrijedi:

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}.$$

Inverznom Laplaceovom transformacijom od $Y(s)$ dobije se odziv sustava na pobudu jedinične stepenice:

$$y(t) = 1 - e^{-t}.$$

Primjer 7.2.4 Odredite odziv sustava:

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

na pobudu jedinične rampe $u(t) = t$.

Rješenje Za pobudu tipa jedinične rampe vrijedi:

$$u(t) = t \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad U(s) = \tfrac{1}{s^2}.$$

Koristeći definiciju prijenosne funkcije vrijedi:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}/U(s) \Rightarrow Y(s) = G(s)U(s),$$

a za konkretan sustav i pobudu:

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{1}{s+1}\frac{1}{s^2}.$$

S obzirom da je odziv složenijeg tipa i nije ga moguće direktno (bez tablica) inverznom Laplaceovom transformacijom transformirati u vremensko područje, koristit ćemo Heavisideov razvoj na proste razlomke:

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}\frac{1}{s^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+1}.$$

Polovi od $Y(s)$ su:

$$\begin{aligned}
&s^2(s+1) = 0 \Rightarrow s^2 = 0 \wedge s+1 = 0\\
&s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = -1.
\end{aligned}$$

Odredimo sada koeficijente A, B i C. Potrebno je uzeti u obzir višestrukost pola 0. Koristimo relaciju za proračun koeficijenata uz višestruke polove:

$$K_{1.i} = \frac{1}{(r-i)!}\lim_{s\to p_k}\left\{\frac{d^{r-i}}{ds^{r-i}}\left[(s-p_1)^r\frac{P(s)}{Q(s)}\right]\right\}, i = 1,2, K_{1,1} = A, K_{1,2} = B$$

gdje je:

- r - višestrukost pola (npr. ako je broj istih polova 2, $r = 2$)
- i - redni broj koeficijenta iznad pola višestrukosti i

Prema tome, vrijedi:

$$\begin{aligned}
&Y(s) = \tfrac{1}{s^2}\tfrac{1}{s+1} = \tfrac{A}{s} + \tfrac{B}{s^2} + \tfrac{C}{s+1}\\
&A = \tfrac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to 0}\left\{\tfrac{d}{ds}\left[s^2Y(s)\right]\right\} = \lim_{s\to 0}\tfrac{d}{ds}\left[\tfrac{1}{s+1}\right] = \lim_{s\to 0}\tfrac{-1}{(s+1)^2} = -1\\
&B = \lim_{s\to 0} s^2Y(s) = \lim_{s\to 0}\tfrac{1}{(s+1)} = 1\\
&C = \lim_{s\to -1}(s+1)Y(s) = \lim_{s\to -1}\tfrac{1}{s^2} = 1.
\end{aligned}$$

Vrijedi:

$$Y(s) = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}.$$

Inverznom Laplaceovom transformacijom od $Y(s)$ dobije se odziv sustava na pobudu jedinične stepenice:

$$y(t) = -1 + t + e^{-t}.$$

Primjer 7.2.5 Odredite odziv mirnog sustava opisanog diferencijalnom jednadžbom:

$$y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = 3u(t)$$

na pobudu jedinične stepenice.

Rješenje Za mirni sustav vrijedi da su početni uvjeti jednaki nuli. Koristeći svojstvo derivacije originala dobije se:

$$\begin{aligned}
&y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet Y(s) \\
&y'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet sY(s) - y(0) = sY(s) - 0 = sY(s) \\
&y''(0) \circ\!\!-\!\!\bullet s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) \\
&u(t) = \mu(t) \circ\!\!-\!\!\bullet U(s) = \tfrac{1}{s}.
\end{aligned}$$

Na temelju prethodnog izlaganja prijenosna funkcija sustava je:

$$\begin{aligned}
&y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = 3u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet Y(s)\left(s^2 + 2s + 3\right) = 3U(s) \Rightarrow \\
&G(s) = \tfrac{Y(s)}{U(s)} = \tfrac{3}{s^2+2s+3}.
\end{aligned}$$

Koristeći definiciju prijenosne funkcije vrijedi:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} / U(s) \Rightarrow Y(s) = G(s)U(s),$$

a za konkretan sustav i pobudu:

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{3}{s^2 + 2s + 3}\frac{1}{s}.$$

Polovi od $Y(s)$ su:

$$\begin{gathered}
s\left(s^2 + 2s + 3\right) = 0 \Rightarrow s = 0 \wedge s^2 + 2s + 3 = 0 \\
s_1 = 0, s_{2,3} = -1 \pm j\sqrt{2}.
\end{gathered}$$

Kada su polovi konjugirano kompleksni, tada je Laplaceov transformat jednostavnije rastaviti na proste razlomke koristeći metodu izjednačavanja koeficijenata uz iste potencije od s. Isto tako vrijedi,nako su polovi konjugirano kompleksni, tada će rezultat inverzne transformacije uvijek biti sinus ili kosinus signal otežan s eksponencijalnim članom e^{-at}. Prema tome, nazivnik razlomka čiji su polovi konjugirano kompleksni moraju se svesti na potpuni kvadrat. Slijedi izračun:

$$\begin{aligned}
&Y(s) = G(s)\tfrac{1}{s} = \tfrac{3}{s^2+2s+3}\tfrac{1}{s} = \tfrac{A}{s} + \tfrac{Bs+C}{s^2+2s+3} / s\left(s^2 + 2s + 3\right) \\
&A\left(s^2 + 2s + 3\right) + (Bs + C)\,s = 3 \Rightarrow 3A = 3 \Rightarrow \\
&A = 12A + C = 0 \Rightarrow C = -2, A + B = 0 \Rightarrow B = -1 \\
&Y(s) = \tfrac{1}{s} - \tfrac{s+2}{s^2+2s+3} = \tfrac{1}{s} - \tfrac{s+1+1}{(s+1)^2+2} \\
&Y(s) = \tfrac{1}{s} - \tfrac{s+1}{(s+1)^2+2} - \tfrac{1\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{(s+1)^2+2}.
\end{aligned}$$

Inverznom Laplaceovom transformacijom od $Y(s)$ dobije se odziv sustava na pobudu jedinične stepenice:

$$y(t) = 1 - e^{-t}\left(\cos\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t\right).$$

Drugi način (kompliciraniji u slučaju kompleksnih, dvostrukih i višestrukih polova) na koji se može riješiti problem inverzne Laplaceove transformacije od $Y(s)$ je korištenje Heavisideovog razvoja. Prema Heavisideovom razvoju $Y(s)$ rastavljamo kao (u obzir se uzimaju polovi koje smo proračunali):

$$\begin{array}{l}
Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{3}{s^2+2s+3}\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1-j\sqrt{2}} + \frac{C}{s+1+j\sqrt{2}} \\
A = \lim\limits_{s\to 0} sY(s) = \lim\limits_{s\to 0}\frac{3}{s^2+2s+3} = 1 \\
B = \lim\limits_{s\to -1+j\sqrt{2}}\left(s+1-j\sqrt{2}\right)Y(s) = \lim\limits_{s\to -1+j\sqrt{2}}\frac{3}{s\left(s+1+j\sqrt{2}\right)} = \frac{3}{\left(-1+j\sqrt{2}\right)j2\sqrt{2}} \\
B = \frac{3}{\left(-1+j\sqrt{2}\right)j2\sqrt{2}} = \frac{3}{-4-2\sqrt{2}j}\frac{-4+j2\sqrt{2}}{-4+j2\sqrt{2}} = \frac{-12+j6\sqrt{2}}{24} = \frac{-2+j\sqrt{2}}{4} \\
C = \lim\limits_{s\to -1-j\sqrt{2}}\left(s+1+j\sqrt{2}\right)Y(s) = \lim\limits_{s\to -1-j\sqrt{2}}\frac{3}{s\left(s+1-j\sqrt{2}\right)} = \frac{3}{\left(-1-j\sqrt{2}\right)\left(-j2\sqrt{2}\right)} \\
C = \frac{3}{\left(-1-j\sqrt{2}\right)\left(-j2\sqrt{2}\right)} = \frac{3}{-4+2\sqrt{2}j}\frac{-4-j2\sqrt{2}}{-4-j2\sqrt{2}} = \frac{-12-j6\sqrt{2}}{24} = \frac{-2-j\sqrt{2}}{4} \\
Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{\frac{-2+j\sqrt{2}}{4}}{s+1-j\sqrt{2}} + \frac{\frac{-2-j\sqrt{2}}{4}}{s+1+j\sqrt{2}}.
\end{array}$$

Inverznom Laplaceovom transformacijom od $Y(s)$ dobije se odziv sustava na pobudu jedinične stepenice:

$$y(t) = 1 + \frac{-2+j\sqrt{2}}{4}e^{-t+j\sqrt{2}t} - \frac{2+j\sqrt{2}}{4}e^{-t-j\sqrt{2}t}.$$

Prethodni izraz potrebno je srediti uz korištenje Eulerovih formula za sinus i kosinus:

$$\begin{array}{l}
\cos(\omega t) = \frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2} \\
\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}.
\end{array}$$

Sređivanjem ćemo dobiti:

$$\begin{array}{l}
y(t) = 1 + \frac{-2+j\sqrt{2}}{4}e^{-t}e^{j\sqrt{2}t} - \frac{2+j\sqrt{2}}{4}e^{-t}e^{-j\sqrt{2}t} \\
y(t) = 1 + e^{-t}\left(\frac{-2+j\sqrt{2}}{4}e^{j\sqrt{2}t} - \frac{2+j\sqrt{2}}{4}e^{-j\sqrt{2}t}\right) \\
y(t) = 1 + e^{-t}\left(-\frac{1}{2}e^{j\sqrt{2}t} - \frac{1}{2}e^{-j\sqrt{2}t} + j\frac{\sqrt{2}}{4}e^{j\sqrt{2}t} - j\frac{\sqrt{2}}{4}e^{-j\sqrt{2}t}\right) \\
y(t) = 1 + e^{-t}\left(-\frac{e^{j\sqrt{2}t}+e^{-j\sqrt{2}t}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{e^{j\sqrt{2}t}-e^{-j\sqrt{2}t}}{2}\frac{j}{j}\right) \\
y(t) = 1 + e^{-t}\left(-\frac{e^{j\sqrt{2}t}+e^{-j\sqrt{2}t}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}\frac{e^{j\sqrt{2}t}-e^{-j\sqrt{2}t}}{2j}\right) \\
y(t) = 1 - e^{-t}\left(\cos\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\sqrt{2}t\right).
\end{array}$$

Rješenja dobivena dvjema metodama su jednaka.

Primjer 7.2.6 Odredite odziv sustava opisanog diferencijalnom jednadžbom:

$$y''(t) + 2.5y'(t) + y(t) = 2u(t)$$

na pobudu jedinične stepenice. Početni su uvjeti sustava: $y(0) = 1, y'(0) = -1$.

Rješenje Koristeći svojstvo derivacije originala dobije se:

$$\begin{aligned}
&y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet Y(s)\\
&y'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet Y(s) - y(0) = sY(s) - 1\\
&y''(0) \circ\!\!-\!\!\bullet s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s + 1\\
&u(t) = \mu(t) \circ\!\!-\!\!\bullet U(s) = \tfrac{1}{s}.
\end{aligned}$$

Na temelju prethodnog izlaganja vrijedi:

$$\begin{aligned}
&y''(t) + 2.5y'(t) + y(t) = 2u(t)\\
&\circ\!\!-\!\!\bullet\\
&s^2Y(s) - s + 1 + 2.5\left(sY(s) - 1\right) + Y(s) = 2U(s) = \tfrac{2}{s}\\
&Y(s)\left(s^2 + 2.5s + 1\right) = \tfrac{2}{s} + s + 1.5 = \tfrac{2+s^2+1.5s}{s}\\
&Y(s) = \tfrac{2+s^2+1.5s}{s(s^2+2.5s+1)}.
\end{aligned}$$

Polovi od Y(s) su:

$$\begin{aligned}
&s\left(s^2 + 2.5s + 1\right) = 0 \Rightarrow s = 0 \wedge s^2 + 2.5s + 1 = 0\\
&s_1 = 0, s_2 = -0.5, s_3 = -2.
\end{aligned}$$

Transformat $Y(s)$ potrebno je rastaviti na proste razlomke koristeći Heavisideov razvoj:

$$\begin{aligned}
&Y(s) = \tfrac{2+s^2+1.5s}{s(s^2+2.5s+1)} = \tfrac{2+s^2+1.5s}{s(s+0.5)(s+2)} = \tfrac{A}{s} + \tfrac{B}{s+0.5} + \tfrac{C}{s+2}\\
&A = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} \tfrac{2+s^2+1.5s}{s^2+2.5s+1} = 2\\
&B = \lim_{s\to -0.5} (s+0.5)\,Y(s) = \lim_{s\to -0.5} \tfrac{2+s^2+1.5s}{s(s+2)} = -2\\
&C = \lim_{s\to -2} (s+2)\,Y(s) = \lim_{s\to -2} \tfrac{2+s^2+1.5s}{s(s+0.5)} = 1\\
&Y(s) = \tfrac{2}{s} - \tfrac{2}{s+0.5} + \tfrac{1}{s+2}.
\end{aligned}$$

Inverznom Laplaceovom transformacijom od $Y(s)$ dobije se odziv sustava na pobudu jedinične stepenice s početnim uvjetima $y(0) = 1, y'(0) = -1$:

$$y(t) = 2 - 2e^{-0.5t} + e^{-2t}.$$

Primjer 7.2.7 Odredite odziv mirnog sustava opisanog diferencijalnom jednadžbom:

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 3u(t)$$

na pobudu $u(t) = e^{-3t}$.

Rješenje Za mirni sustav vrijedi da su početni uvjeti jednaki nuli. Koristeći svojstvo derivacije originala dobije se:

$$\begin{aligned}
&y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet Y(s)\\
&y'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet sY(s) - y(0) = sY(s) - 0 = sY(s)\\
&y''(0) \circ\!\!-\!\!\bullet s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s)\\
&u(t) = e^{-3t} \circ\!\!-\!\!\bullet U(s) = \tfrac{1}{s+3}.
\end{aligned}$$

Na temelju prethodnog izlaganja prijenosna funkcija sustava je:

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = 3u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet Y(s)\left(s^2 + 4s + 3\right) = 3U(s) \Rightarrow$$
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3}{s^2+4s+3}.$$

Koristeći definiciju prijenosne funkcije vrijedi:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} / U(s) \Rightarrow Y(s) = G(s)U(s),$$

a za konkretan sustav i pobudu:

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s+3} = \frac{3}{s^2+4s+3}\frac{1}{s+3}.$$

Polovi od $Y(s)$ su:

$$s\left(s^2 + 4s + 3\right) = 0 \Rightarrow s^2 + 4s + 3 = 0 \wedge s + 3 = 0$$
$$s_1 = -1, s_2 = -3, s_3 = -3.$$

Transformat $Y(s)$ sada ima oblik:

$$Y(s) = \frac{3}{(s+1)(s+3)^2}.$$

Primijetimo da se pojavljuju dvostruki polovi. Kao što smo rekli, kada se pojave višestruki polovi, najjednostavnije je koristiti metodu izjednačavanja koeficijenata uz iste potencije od s. Transformat $Y(s)$ možemo rastaviti na sljedeće proste razlomke:

$$Y(s) = \frac{3}{(s+1)(s+3)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{(s+3)^2}.$$

Nadalje vrijedi:

$$\begin{array}{l}
Y(s) = \frac{3}{(s+1)(s+3)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{(s+3)^2} / (s+1)(s+3)^2 \\
A(s+3)^2 + B(s+1)(s+3) + C(s+1) = 3 \\
A(s^2+6s+9) + B(s^2+4s+3) + C(s+1) = 3 \\
9A + 3B + C = 3 \Rightarrow -9B + 3B + C = 3 \\
6A + 4B + C = 0 \Rightarrow -6B + 4B + C = 0 / -1 \\
A + B = 0 \Rightarrow A = -B = \frac{3}{4} \\
\left.\begin{array}{l} -6B + C = 3 \\ 2B - C = 0 \end{array}\right\} -4B = 3 \Rightarrow B = -\frac{3}{4} \\
C = 2B = -\frac{3}{2} \\
Y(s) = \frac{\frac{3}{4}}{s+1} - \frac{\frac{3}{4}}{s+3} - \frac{\frac{3}{2}}{(s+3)^2}.
\end{array}$$

Inverznom Laplaceovom transformacijom od $Y(s)$ dobije se odziv sustava:

$$y(t) = \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{3}{4}e^{-3t} - \frac{3}{2}te^{-3t}.$$

Drugi način (kompliciraniji u slučaju kompleksnih, dvostrukih i višestrukih polova) na koji se može riješiti problem inverzne Laplaceove transformacije od $Y(s)$ je korištenje Heavisideovog razvoja. Uzmimo u obzir višestrukost pola -3. Koristimo formulu s predavanja:

$$K_{2.i} = \frac{1}{(r-i)!} \lim_{s \to p_k} \left\{ \frac{d^{r-i}}{ds^{r-i}} \left[(s-p_1)^r \frac{P(s)}{Q(s)} \right] \right\}, i = 1, 2, K_{2,1} = A, K_{2,2} = B.$$

Prema Heavisideovom razvoju $Y(s)$ rastavljamo kao (u obzir se uzimaju polovi koje smo proračunali):

$$\begin{aligned}
&Y(s) = \tfrac{3}{(s+1)(s+3)^2} = \tfrac{A}{s+1} + \tfrac{B}{s+3} + \tfrac{C}{(s+3)^2} \\
&A = \lim_{s \to -1} (s+1)\, Y(s) = \lim_{s \to -1} \tfrac{3}{(s+3)^2} = \tfrac{3}{4} \\
&B = \tfrac{1}{(2-1)!} \lim_{s \to -3} \left\{ \tfrac{d}{ds} \left[(s+3)^2 Y(s) \right] \right\} = \lim_{s \to -3} \tfrac{d}{ds} \left[\tfrac{3}{s+1} \right] = \lim_{s \to -3} \tfrac{-3}{(s+1)^2} = -\tfrac{3}{4} \\
&C = \lim_{s \to -3} (s+1)^2 Y(s) = \lim_{s \to -3} \tfrac{3}{s+1} = -\tfrac{3}{2} \\
&Y(s) = \tfrac{\frac{3}{4}}{s+1} - \tfrac{\frac{3}{4}}{s+3} - \tfrac{\frac{3}{2}}{(s+3)^2}.
\end{aligned}$$

Inverznom Laplaceovom transformacijom od $Y(s)$ dobije se odziv sustava:

$$y(t) = \frac{3}{4} e^{-t} - \frac{3}{4} e^{-3t} - \frac{3}{2} t e^{-3t}.$$

Na oba načina dobili smo isti rezultat.

7.2.1 Zadaci za vježbu

Zadatak 7.2.1 Odredite inverznu Laplaceovu transformaciju sljedećih transformata:

$$\begin{aligned}
X_1(s) &= \tfrac{-2}{s-2} \\
X_2(s) &= \tfrac{2}{(s+1)^3} \\
X_3(s) &= \tfrac{s+2}{s^2+2s+2} \\
X_4(s) &= \tfrac{s^2+s+1}{s^3}.
\end{aligned}$$

Zadatak 7.2.2 Odredite impulsni odziv sustava:

$$G(s) = \frac{2}{s+3}.$$

Zadatak 7.2.3 Odredite odziv sustava:

$$G(s) = \frac{2}{s+3}$$

na pobudu jedinične stepenice $u(t) = \mu(t)$.

Zadatak 7.2.4 Odredite odziv sustava:

$$G(s) = \frac{2}{s+3}$$

na pobudu jedinične rampe $u(t) = t$.

Zadatak 7.2.5 Odredite odziv mirnog sustava opisanog diferencijalnom jednadžbom:

$$y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = 2u(t)$$

na pobudu jedinične stepenice.

Zadatak 7.2.6 Odredite odziv sustava opisanog diferencijalnom jednadžbom:

$$y''(t) + 4.5y'(t) + 2y(t) = 2u(t)$$

na pobudu jedinične stepenice. Početni su uvjeti sustava: $y(0) = -1, y'(0) = 1$.

Zadatak 7.2.7 Odredite odziv mirnog sustava opisanog diferencijalnom jednadžbom:

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 2u(t)$$

na pobudu $u(t) = e^{-2t}$.

Zadatak 7.2.8 Odredite odziv mirnog sustava opisanog diferencijalnom jednadžbom:

$$y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = u(t)$$

na pobudu $u(t) = e^{-2t}$.

Poglavlje 8

Fourierovi redovi

Svaka se funkcija $f(t)$ na ograničenom intervalu može prikazati u obliku sume harmonika:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega t + \varphi). \tag{8.1}$$

Suma 8.1 predstavlja razvoj funkcije $f(t)$ u Fourierov red. Slijedi nekoliko načina razvoja funkcije $f(t)$ u Fourierov red:

- Fourierov red funkcije $f(t)$ na intervalu $-\pi \leq t \leq \pi$:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)), \tag{8.2}$$

  a Fourierovi koeficijenti Fourierovog reda računaju se prema:

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\ a_n &= \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, n > 0 \\ b_n &= \tfrac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt, n > 0. \end{aligned} \tag{8.3}$$

- Trigonometrijski Fourierov red periodične funkcije $f(t)$ s periodom $T = b - a$ je:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)\right), \tag{8.4}$$

a Fourierovi koeficijenti Fourierovog reda računaju se prema:

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{2}{T}\int\limits_a^b f(t)dt \\ a_n &= \tfrac{2}{T}\int\limits_a^b f(t)\cos\left(\tfrac{2n\pi t}{T}\right)dt, n>0 \\ b_n &= \tfrac{2}{T}\int\limits_a^b f(t)\sin\left(\tfrac{2n\pi t}{T}\right)dt, n>0. \end{aligned} \tag{8.5}$$

- Fourierovi redovi parnih i neparnih funkcija:

  – Ako je funkcija parna ($f(-t) = f(t)$) Fourierov red je:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right), \tag{8.6}$$

a Fourierovi koeficijenti Fourierovog reda računaju se prema:

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{2}{L}\int\limits_0^L f(t)dt \\ a_n &= \tfrac{2}{L}\int\limits_0^L f(t)\cos\left(\tfrac{n\pi t}{L}\right)dt, n>0. \end{aligned} \tag{8.7}$$

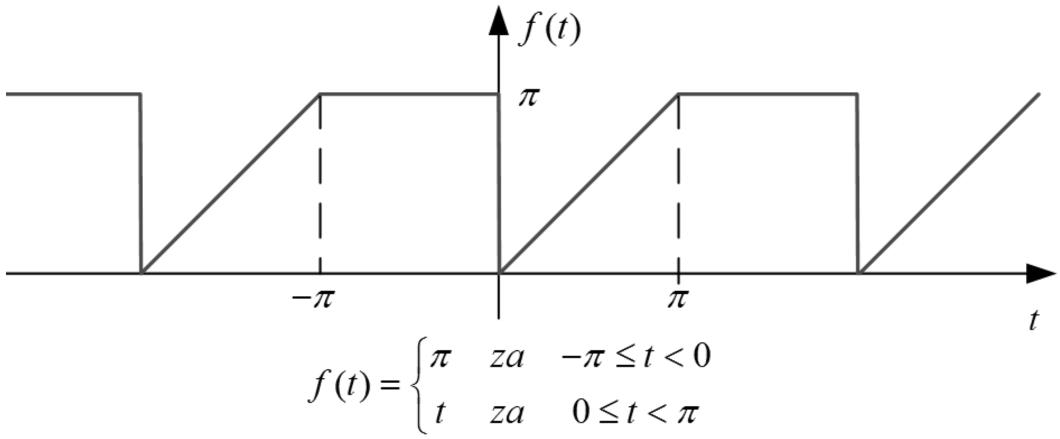
  – Ako je funkcija neparna ($f(-t) = -f(t)$) Fourierov red je:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right), \tag{8.8}$$

a Fourierovi koeficijenti Fourierovog reda računaju se prema:

$$b_n = \frac{2}{L}\int\limits_0^L f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt, n>0. \tag{8.9}$$

Primjer 8.1 Funkciju *f(t)* sa slike 8.1 potrebno je razviti u Fourierov red na intervalu $[-\pi, \pi]$.



Slika 8.1: Funkcija $f(t)$

Rješenje Fourierov red funkcije $f(t)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ razvija se u sumu oblika:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Potrebno je pronaći koeficijente Fourierovog reda a_0, a_n i b_n prema:

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \\ a_n &= \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt, n > 0 \\ b_n &= \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt, n > 0. \end{aligned}$$

Funkcija se matematički na intervalu $[-\pi, \pi]$ može prikazati u dva zasebna intervala:

$$f(t) = \begin{cases} \pi & za \quad -\pi \le t < 0 \\ t & za \quad 0 \le t < \pi. \end{cases}$$

Za Fourierov koeficijent a_0 vrijedi:

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{0} f(t)dt + \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(t)dt = \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{0} \pi dt + \tfrac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} t dt \\ a_0 &= t\Big|_{-\pi}^{0} + \tfrac{t^2}{2\pi}\Big|_{0}^{\pi} = (0 - (-\pi)) + \left(\tfrac{\pi^2}{2\pi} - 0\right) = \pi + \tfrac{\pi}{2} = \tfrac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Za Fourierove koeficijente a_n vrijedi:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} \pi\cos(nt)dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} t\cos(nt)dt$$
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} \pi\cos(nt)dt = \int\limits_{-\pi}^{0}\cos(nt)dt = \frac{1}{n}\sin(nt)\Big|_{-\pi}^{0} = 0 - 0 = 0$$
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} t\cos(nt)dt \left| \begin{array}{cc} u = t & dv = \cos(nt)dt \\ du = dt & v = \frac{1}{n}\sin(nt) \end{array} \right| = \frac{1}{\pi}\frac{t}{n}\sin(nt)\Big|_{0}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{1}{n}\sin(nt)dt =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{1}{n}\sin(nt)dt = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{1}{n}\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}\cos(nt)\Big|_{0}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}\left(\cos(n\pi) - 1\right)$$
$$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & za \quad n = 2,4,6,... \\ -1 & za \quad n = 1,3,5,... \end{cases} = (-1)^n$$
$$\frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}\left(\cos(n\pi) - 1\right) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}\left((-1)^n - 1\right)$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} \pi\cos(nt)dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} t\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}\left((-1)^n - 1\right).$$

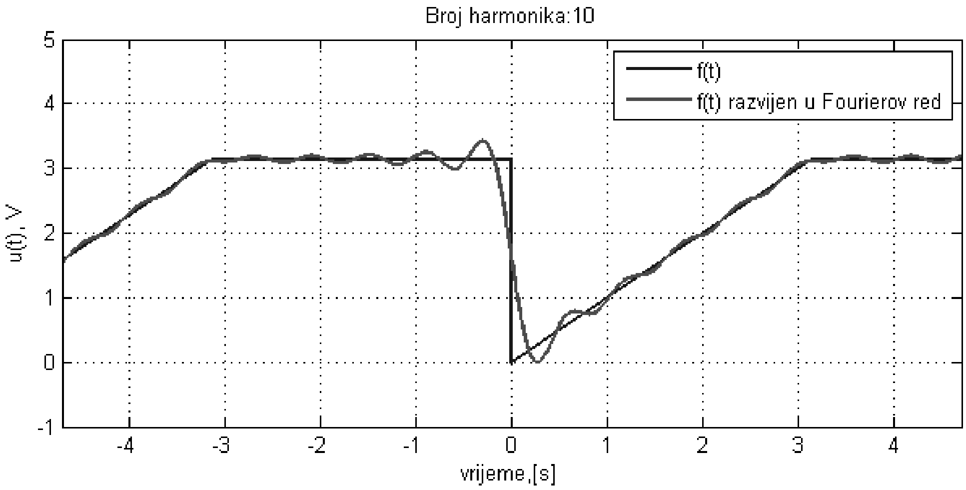
Za Fourierove koeficijente b_n vrijedi:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} \pi\sin(nt)dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} t\sin(nt)dt$$
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} \pi\sin(nt)dt = \int\limits_{-\pi}^{0}\sin(nt)dt = -\frac{1}{n}\cos(nt)\Big|_{-\pi}^{0} = -\frac{1}{n}\left(1 - \cos(nt)\right)$$
$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} t\sin(nt)dt \left| \begin{array}{cc} u = t & dv = \sin(nt)dt \\ du = dt & v = -\frac{1}{n}\cos(nt) \end{array} \right| = -\frac{t}{\pi n}\cos(nt)\Big|_{0}^{\pi} + \int\limits_{0}^{\pi}\frac{1}{n}\cos(nt)dt =$$
$$= -\frac{\pi}{\pi n}\cos(n\pi) - \int\limits_{0}^{\pi}\frac{1}{n}\cos(nt)dt = -\frac{1}{n}\cos(n\pi) - \frac{1}{n^2}\sin(nt)\Big|_{0}^{\pi} = -\frac{1}{n}\cos(n\pi)$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0} \pi\sin(nt)dt + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} t\sin(nt)dt = -\frac{1}{n}\left(1 - \cos(nt)\right) - \frac{1}{n}\cos(n\pi) = -\frac{1}{n}.$$

Izračunate koeficijente sada uvrstimo u Fourierov red funkcije $f(t)$:

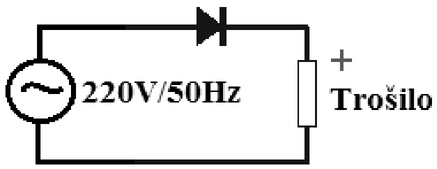
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nt + b_n\sin nt\right)$$
$$f(t) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos nt - \frac{1}{n}\sin nt\right).$$

Prethodna relacija predstavlja Fourierov razvoj funkcije $f(t)$ sa slike 8.1. Slika 8.2 prikazuje aproksimaciju funkcije $f(t)$ sa slike 8.1 s prvih 10 harmonika.



Slika 8.2: Funkcija $f(t)$ sa slike 8.1 razvijena u Fourierov red

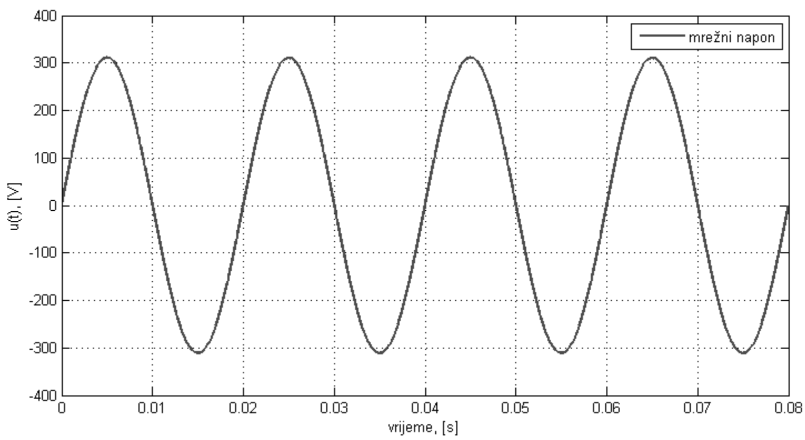
Primjer 8.2 Na slici 8.3 prikazan je poluvalni ispravljač koji je spojen na izmjeničnu mrežu $220V/50Hz$. Potrebno je odrediti Fourierov razvoj ispravljenog napona.



Slika 8.3: Poluvalni ispravljač

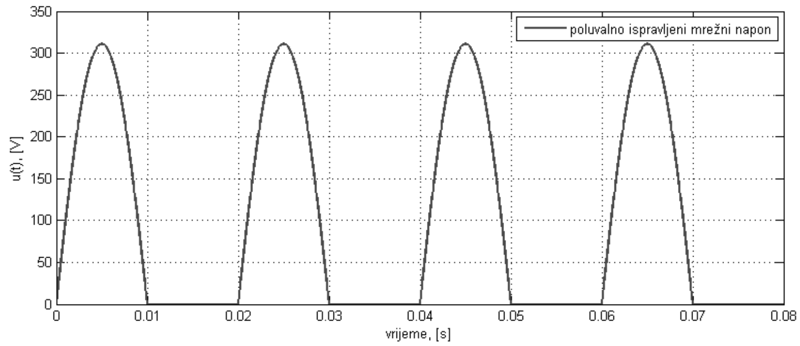
Izmjenični napon prikazan je na slici 8.4 i matematički se može zapisati kao:

$$u(t) = 220\sqrt{2}\sin(100\pi t)\,\mathrm{V}.$$



Slika 8.4: Izmjenični napon $220V/50Hz$

Rješenje Poluvalni ispravljač za ispravljanje napona koristi diodu. Za diodu je poznato da je propusno polarizirana kada je na anodi pozitivniji napon od napona na katodi. Prema tome, dioda propušta samo pozitivne poluperiode sinusnog mrežnog napona. Zato se ovaj ispravljač i naziva poluvalnim ispravljačem. Ispravljeni napon prikazan je na slici 8.5.



Slika 8.5: Poluvalno ispravljen izmjenični napon $220V/50Hz$

Ispravljeni signal je periodičan s periodom $T = 20$ ms. Koristimo razvoj funkcije $u(t) = 220\sqrt{2}\sin(100\pi t)$ V u trigonometrijski Fourierov red prema relaciji:

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{2n\pi t}{T} + b_n \sin\frac{2n\pi t}{T}\right)\text{V}.$$

Potrebno je pronaći koeficijente Fourierovog reda a_0, a_n i b_n prema:

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{2}{T}\int_a^b u(t)dt \\ a_n &= \tfrac{2}{T}\int_a^b u(t)\cos\tfrac{2n\pi t}{T}dt, n > 0 \\ b_n &= \tfrac{2}{T}\int_a^b u(t)\sin\tfrac{2n\pi t}{T}dt, n > 0. \end{aligned}$$

Ispravljeni napon na jednoj periodi matematički se može opisati prema relaciji:

$$u(t) = \begin{cases} 220\sqrt{2}\sin(100\pi t)\,\text{V} & za \quad 0 \le t < 0.01 \\ 0 & za \quad 0.01 \le t < 0.02 \end{cases}.$$

Za Fourierov koeficijent a_0 vrijedi:

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{2}{T}\int_0^T u(t)dt = \tfrac{2}{0.02}\int_0^{0.02} u(t)dt = 100\int_0^{0.01} u(t)dt + 100\int_{0.01}^{0.02} u(t)dt \\ a_0 &= 100\int_0^{0.01} 220\sqrt{2}\sin(100\pi t)dt = -100\tfrac{220\sqrt{2}}{100\pi}\cos(100\pi t)\big|_0^{0.01} \\ a_0 &= -\tfrac{220\sqrt{2}}{\pi}(\cos(100\pi\cdot 0.01) - 1) = \tfrac{440\sqrt{2}}{\pi}. \end{aligned}$$

Za Fourierove koeficijente a_n vrijedi:

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_0^T u(t)\cos\frac{2n\pi t}{T}dt = \frac{2}{0.02}\int\limits_0^{0.02} u(t)\cos\frac{2n\pi t}{0.02}dt$$
$$a_n = 100\int\limits_0^{0.01} u(t)\cos\left(100n\pi t\right)dt + 100\int\limits_{0.01}^{0.02} u(t)\cos\left(100n\pi t\right)dt$$
$$a_n = 100\int\limits_0^{0.01} 220\sqrt{2}\sin\left(100\pi t\right)\cos\left(100n\pi t\right)dt.$$

Podintegralna funkcija je umnožak sinus i kosinus funkcije. Da bismo riješili ovaj integral moramo dva puta raditi parcijalnu integraciju što može biti komplicirano. Riješit ćemo ovaj zadatak na lakši način, koristeći formule pretvorbe umnoška trigonometrijskih funkcija u zbroj:

$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y)+\sin(x-y)\right)$$
$$\cos x\sin y = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y)-\sin(x-y)\right)$$
$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x+y)+\cos(x-y)\right)$$
$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right).$$

Nastavljamo izvod Fourierovih koeficijenata a_n:

$$a_n = 100\int\limits_0^{0.01} 220\sqrt{2}\sin\left(100\pi t\right)\cos\left(100n\pi t\right)dt, \sin x\cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x+y)+\sin(x-y)\right)$$
$$a_n = 22000\sqrt{2}\int\limits_0^{0.01} \frac{1}{2}\left(\sin\left(100\pi t+100n\pi t\right)+\sin\left(100\pi t-100n\pi t\right)\right)dt$$
$$a_n = 22000\frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^{0.01} \left(\sin\left(100\pi\left(1+n\right)t\right)+\sin\left(100\pi\left(1-n\right)t\right)\right)dt$$
$$a_n = -22000\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\cos(100\pi(1+n)t)}{100\pi(1+n)}+\frac{\cos(100\pi(1-n)t)}{100\pi(1-n)}\right)\Bigg|_0^{0.01}$$
$$a_n = -22000\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\cos(\pi(1+n))-1}{100\pi(1+n)}+\frac{\cos(\pi(1-n))-1}{100\pi(1-n)}\right)$$
$$a_n = -220\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\left(\frac{\cos(\pi(1+n))-1}{(1+n)}+\frac{\cos(\pi(1-n))-1}{(1-n)}\right)$$
$$\cos\left(\pi\left(1+n\right)\right) = \cos\left(\pi+\pi n\right) = -\cos\left(\pi n\right)$$
$$\cos\left(\pi\left(1-n\right)\right) = \cos\left(\pi-\pi n\right) = -\cos\left(-\pi n\right) = -\cos\left(\pi n\right)$$
$$a_n = -220\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\left(\frac{-\cos(\pi n)-1}{(1+n)}+\frac{-\cos(\pi n)-1}{(1-n)}\right) = 220\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\left(\cos\left(\pi n\right)+1\right)\left(\frac{1}{(1+n)}+\frac{1}{(1-n)}\right)$$
$$a_n = 220\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\left(\cos\left(\pi n\right)+1\right)\frac{1-n+1+n}{(1+n)(1-n)} = 220\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{(\cos(\pi n)+1)}{1-n^2}$$
$$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & za \quad n=2,4,6,... \\ -1 & za \quad n=1,3,5,... \end{cases} = (-1)^n$$
$$a_n = 220\frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{((-1)^n+1)}{1-n^2}.$$

Za Fourierove koeficijente b_n vrijedi:

$$
\begin{aligned}
&b_n = \tfrac{2}{T}\int\limits_0^T f(t)\sin\tfrac{2n\pi t}{T}dt = \tfrac{2}{0.02}\int\limits_0^{0.02} f(t)\sin\tfrac{2n\pi t}{0.02}dt\\
&b_n = 100\int\limits_0^{0.01} f(t)\sin\left(100n\pi t\right)dt + 100\int\limits_{0.01}^{0.02} f(t)\sin\left(100n\pi t\right)dt\\
&b_n = 100\int\limits_0^{0.01} 220\sqrt{2}\sin\left(100\pi t\right)\sin\left(100n\pi t\right)dt, \sin x\sin y = \tfrac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right)\\
&b_n = 22000\sqrt{2}\int\limits_0^{0.01} \tfrac{1}{2}(\cos\left(100\pi t - 100n\pi t\right) - \cos\left(100\pi t + 100n\pi t\right))dt\\
&b_n = 22000\tfrac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^{0.01} (\cos\left(100\pi\left(1-n\right)t\right) - \cos\left(100\pi\left(1+n\right)t\right))dt\\
&b_n = 22000\tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\tfrac{\sin(100\pi(1-n)t)}{100\pi(1-n)} - \tfrac{\sin(100\pi(1+n)t)}{100\pi(1+n)}\right)\Big|_0^{0.01}\\
&b_n = -22000\tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\tfrac{\sin(\pi(1-n))-0}{100\pi(1-n)} + \tfrac{\sin(\pi(1+n))-0}{100\pi(1+n)}\right)\\
&\sin\left(\pi\left(1-n\right)\right) = \sin\left(\pi-\pi n\right) = -\sin\left(-\pi n\right) = \sin\left(\pi n\right) = 0\\
&\sin\left(\pi\left(1+n\right)\right) = \sin\left(\pi+\pi n\right) = -\sin\left(\pi n\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Ukoliko dovoljno ne poznajemo limese, zaključit ćemo da su svi koeficijenti b_n jednaki nuli. Međutim, to bi bila greška koja bi nas navela na krivi zaključak. Što se događa kada je $n = 1$? Tada pribrojnik:

$$\frac{\sin\left(\pi\left(1-n\right)\right)}{100\left(1-n\right)}$$

postaje neodređen jer imamo izraz $0/0$. Sada ćemo upotrijebiti limese kako bismo uspješno izračunali koeficijent b_1:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to 1} b_n = \lim_{n\to 1}\left(-220\tfrac{\sqrt{2}}{2\pi}\left(\tfrac{\sin(\pi(1-n))}{(1-n)} + \tfrac{\sin(\pi(1+n))}{\pi(1+n)}\right)\right)\\
&\lim_{n\to 1} b_n = -220\tfrac{\sqrt{2}}{2\pi}\lim_{n\to 1}\tfrac{\sin(\pi(1-n))}{(1-n)}.
\end{aligned}
$$

S obzirom da smo došli do izraza $0/0$, koristit ćemo L'Hôpitalovo pravilo [1]:

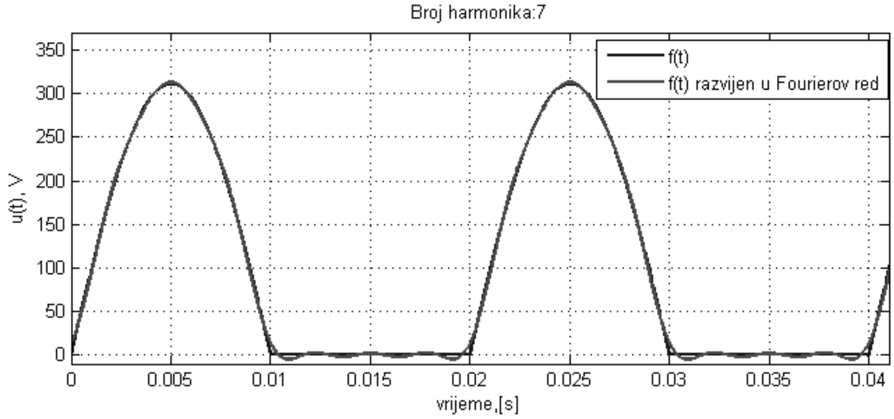
$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to 1} b_n = -220\tfrac{\sqrt{2}}{2\pi}\lim_{n\to 1}\tfrac{\frac{d}{dn}(\sin(\pi(1-n)))}{\frac{d}{dn}(1-n)} = -220\tfrac{\sqrt{2}}{2\pi}\lim_{n\to 1}\tfrac{-\pi\cos(\pi(1-n))}{-1} = 110\sqrt{2}\\
&b_1 = 110\sqrt{2}, b_n = 0, n > 1.
\end{aligned}
$$

Izračunate koeficijente sada uvrstimo u Fourierov red funkcije $f(t)$:

$$
\begin{aligned}
&u(t) = \tfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\tfrac{2n\pi t}{T} + b_n\sin\tfrac{2n\pi t}{T}\right)\mathrm{V}\\
&u(t) = \tfrac{440\sqrt{2}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(100n\pi t\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\left(100n\pi t\right)\mathrm{V}\\
&u(t) = \tfrac{220\sqrt{2}}{\pi} + 220\tfrac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{((-1)^n+1)}{1-n^2}\cos\left(100n\pi t\right) + 110\sqrt{2}\sin\left(100\pi t\right)\mathrm{V}.
\end{aligned}
$$

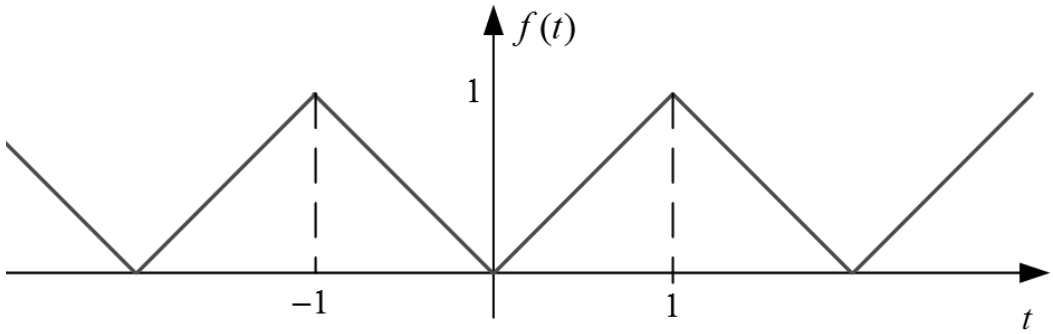
[1] Deriviramo brojnik posebno, nazivnik posebno i ponovno pokušamo izračunati limes

Prethodna relacija predstavlja Fourierov razvoj funkcije $u(t)$ sa slike 8.5. Slika 8.6 prikazuje aproksimaciju funkcije $u(t)$ sa slike 8.5 s prvih 7 harmonika.



Slika 8.6: Funkcija $u(t)$ sa slike 8.5 razvijena u Fourierov red

Primjer 8.3 Funkciju *f(t)* sa slike 8.7 potrebno je razviti u Fourierov red.



$$f(t) = \begin{cases} -t & za \quad -1 \le t < 0 \\ t & za \quad 0 \le t < 1 \end{cases}$$

Slika 8.7: Parna funkcija $f(t)$

Rješenje Funkcija sa slike 8.7 je simetrična s obzirom na os ordinata (y os) pa je time parna funkcija. Parne funkcije, razvijene u Fourierov red, sadrže samo kosinus funkcije Fourierovog reda. Za parno simetričnu funkciju na intervalu $[-L, L]$ vrijedi razvoj:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L}.$$

Koeficijenti uz kosinus funkciju računaju se prema sljedećim izrazima:

$$a_0 = \tfrac{2}{L} \int_0^L f(t)dt$$

$$a_n = \tfrac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \tfrac{n\pi t}{L} dt, n > 0.$$

Budući da period funkcije $f(t)$ sa slike 8.7 iznosi $T = 2$ s, slijedi da je $L = 1$ s. Matematički, funkcija na intervalu $[0, L]$ ima oblik $f(t) = t$.

Za Fourierov koeficijent a_0 vrijedi:

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)dt = \frac{2}{1}\int_0^1 f(t)dt = \frac{2}{1}\int_0^1 tdt = 2\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 = 1.$$

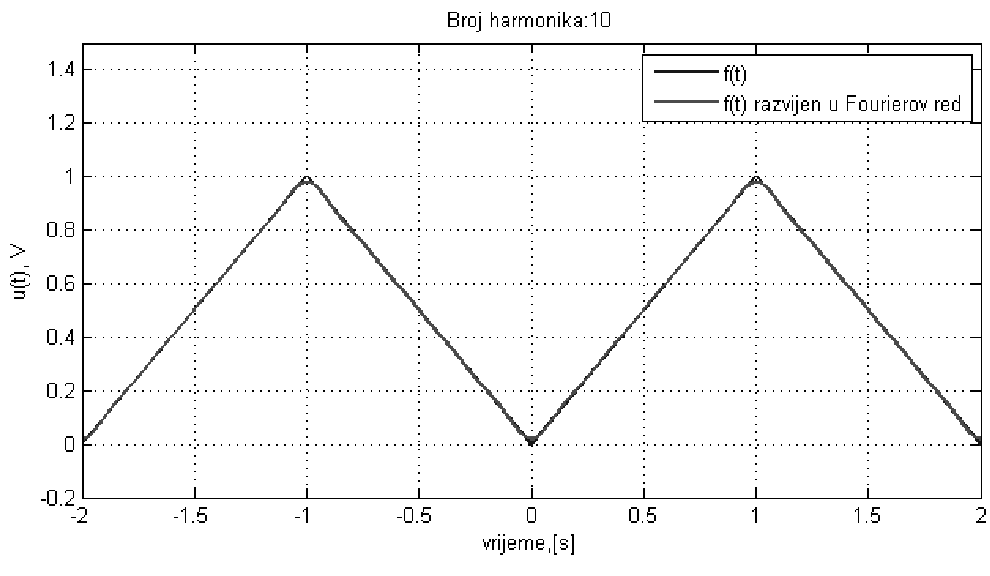
Za Fourierove koeficijente a_n vrijedi:

$$a_n = \tfrac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\tfrac{n\pi t}{L}dt = \tfrac{2}{1}\int_0^1 f(t)\cos(n\pi t)\,dt = 2\int_0^1 t\cos(n\pi t)\,dt$$
$$a_n = 2\int_0^1 t\cos(n\pi t)\,dt\left|\begin{array}{ll} u = t & dv = \cos(n\pi t)\,dt \\ du = dt & v = \frac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\end{array}\right| = 2t\left.\tfrac{\sin(n\pi t)}{n\pi}\right|_0^1 - 2\int_0^1 \tfrac{\sin(n\pi t)}{n\pi}dt$$
$$a_n = 0 - 0 - \tfrac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin(n\pi t)dt = \tfrac{2}{n^2\pi^2}\cos(n\pi t)\Big|_0^1 = \tfrac{2}{n^2\pi^2}\left(\cos(n\pi t) - 1\right)$$
$$\cos(n\pi) = \left\{\begin{array}{lll} 1 & za & n = 2, 4, 6, ... \\ -1 & za & n = 1, 3, 5, ...\end{array}\right. = (-1)^n$$
$$a_n = \tfrac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right).$$

Uvrstimo sada izračunate koeficijente u Fourierov red:

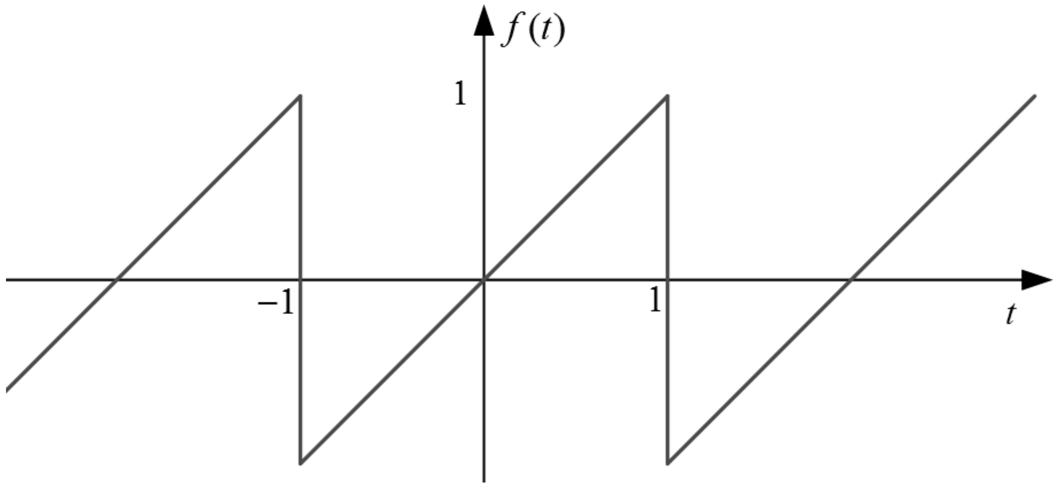
$$f(t) = \tfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\tfrac{n\pi t}{L}$$
$$f(t) = \tfrac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos(n\pi t).$$

Prethodna relacija predstavlja Fourierov razvoj funkcije $f(t)$ sa slike 8.7. Slika 8.8 prikazuje aproksimaciju funkcije $f(t)$ sa slike 8.7 s prvih 10 harmonika.



Slika 8.8: Funkcija $f(t)$ sa slike 8.7 razvijena u Fourierov red

Primjer 8.4 Funkciju *f(t)* sa slike 8.9 potrebno je razviti u Fourierov red.



Slika 8.9: Neparna funkcija $f(t)$

Rješenje Funkcija sa slike 8.9 je simetrična s obzirom na ishodište pa je time neparna funkcija. Neparne funkcije, razvijene u Fourierov red sadrže samo sinus funkcije Fourierovog reda. Za neparno simetričnu funkciju na intervalu $[-L, L]$ vrijedi razvoj:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L}.$$

Koeficijenti uz sinus funkciju računaju se prema sljedećim izrazima:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} dt, n > 0.$$

Budući da period funkcije $f(t)$ sa slike 8.9 iznosi $T = 2$ s slijedi da je $L = 1$ s. Matematički, funkcija na intervalu $[0, L]$ ima oblik $f(t) = t$.

Za Fourierove koeficijente b_n vrijedi:

$$b_n = \tfrac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin \tfrac{n\pi t}{L} dt = \tfrac{2}{1} \int_0^1 f(t) \sin(n\pi t)\, dt = 2 \int_0^1 t \sin(n\pi t)\, dt$$

$$b_n = 2 \int_0^1 t \sin(n\pi t)\, dt \left| \begin{array}{cc} u = t & dv = \sin(n\pi t)\, dt \\ du = dt & v = -\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi} \end{array} \right| = -2t \tfrac{\cos(n\pi t)}{n\pi} \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 \tfrac{\cos(n\pi t)}{n\pi} dt$$

$$b_n = -2 \tfrac{\cos(n\pi)}{n\pi} - 0 + \tfrac{2}{n\pi} \int_0^1 \cos(n\pi t) dt = -2 \tfrac{\cos(n\pi)}{n\pi} + \tfrac{2}{n^2\pi^2} \sin(n\pi t) \Big|_0^1 = -2 \tfrac{\cos(n\pi)}{n\pi}$$

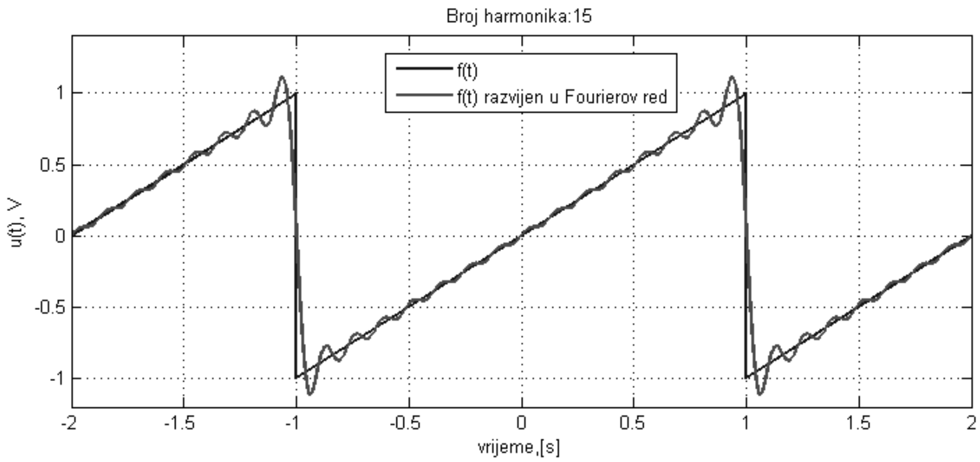
$$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & za \quad n = 2, 4, 6, ... \\ -1 & za \quad n = 1, 3, 5, ... \end{cases} = (-1)^n$$

$$b_n = -2 \tfrac{(-1)^n}{n\pi}.$$

Uvrstimo sada izračunate koeficijente u Fourierov red:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L}$$
$$f(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^n}{n\pi} \sin(n\pi t).$$

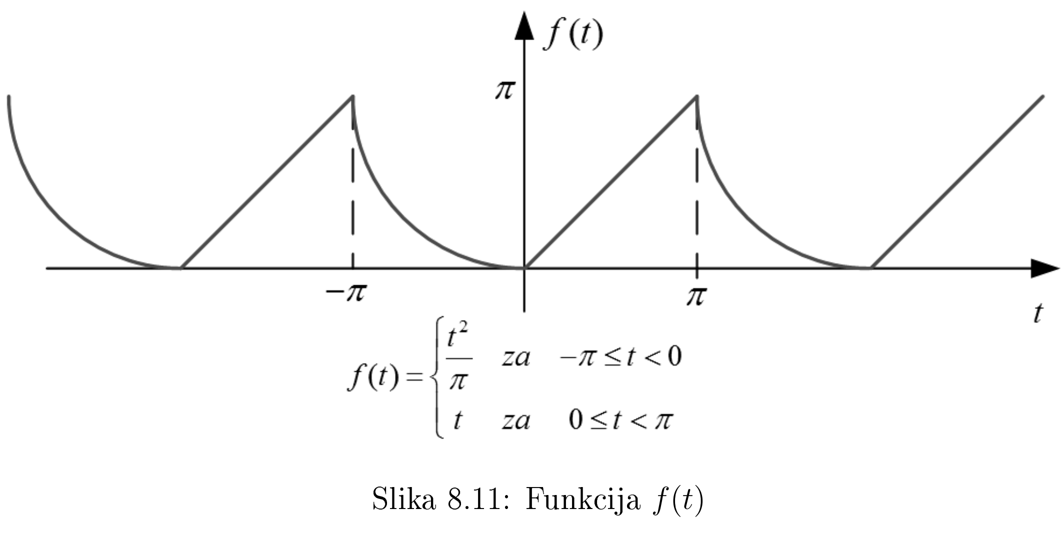
Prethodna relacija predstavlja Fourierov razvoj funkcije $f(t)$ sa slike 8.9. Slika 8.10 prikazuje aproksimaciju funkcije $f(t)$ sa slike 8.9 s prvih 15 harmonika.



Slika 8.10: Funkcija $f(t)$ sa slike 8.9 razvijena u Fourierov red

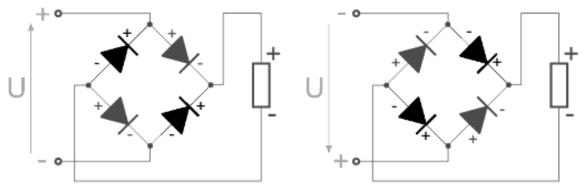
8.1 Zadaci za vježbu

Zadatak 8.1 Funkciju *f(t)* sa slike 8.11 potrebno je razviti u Fourierov red na intervalu $[-\pi, \pi]$.



Slika 8.11: Funkcija $f(t)$

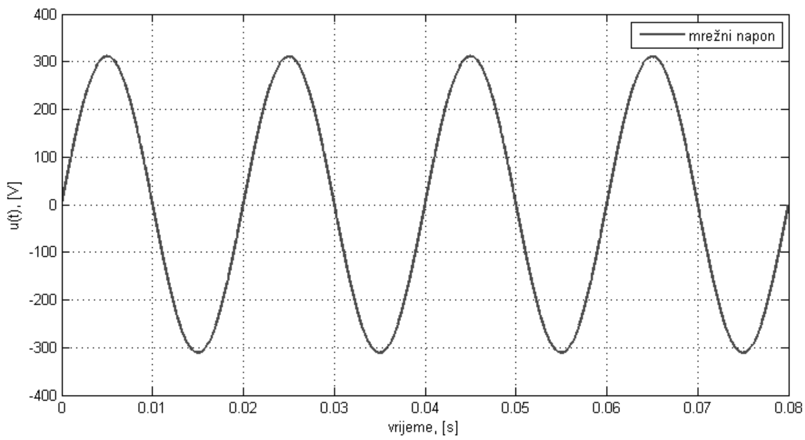
Zadatak 8.2 Na slici 8.3 prikazan je punovalni ispravljač koji je spojen na izmjeničnu mrežu $220V/50Hz$. Potrebno je odrediti Fourierov razvoj ispravljenog napona.



Slika 8.12: Punovalni ispravljač

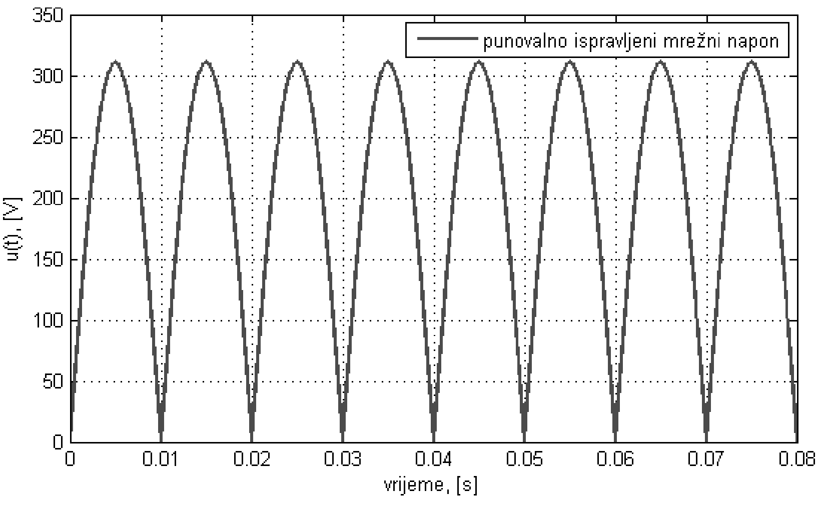
Izmjenični napon prikazan je na slici 8.13 i matematički se može zapisati kao:

$$u(t) = 220\sqrt{2}\sin(100\pi t)\,\mathrm{V}.$$



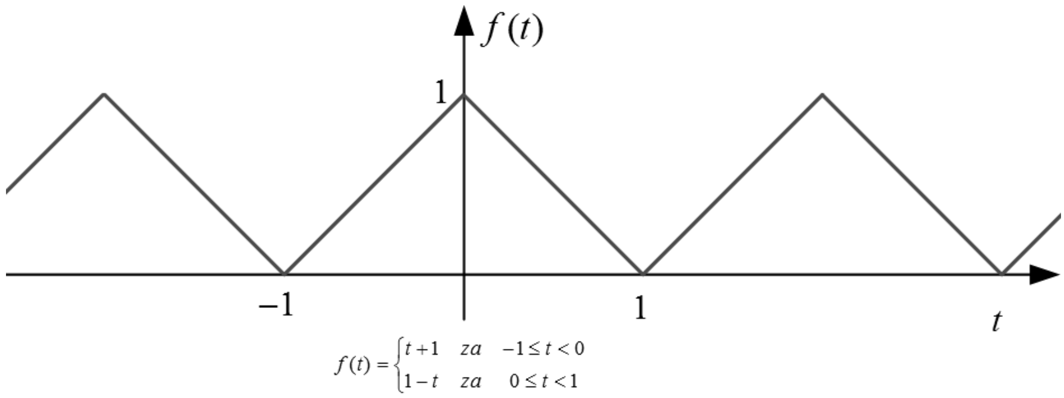
Slika 8.13: Izmjenični napon $220V/50Hz$

Napomena: Punovalni oblik ispravljenog napona prikazan je na slici 8.14.



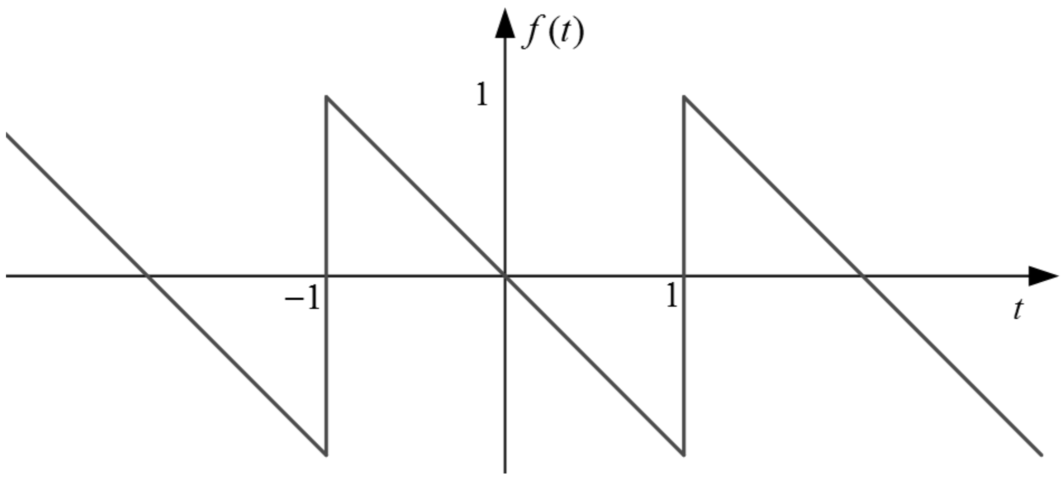
Slika 8.14: Punovalno ispravljen izmjenični napon $220V/50Hz$

Zadatak 8.3 Funkciju *f(t)* sa slike 8.15 potrebno je razviti u Fourierov red.



Slika 8.15: Parna funkcija $f(t)$

Zadatak 8.4 Funkciju *f(t)* sa slike 8.16 potrebno je razviti u Fourierov red.



Slika 8.16: Neparna funkcija $f(t)$

Poglavlje 9

Svojstva Fourierovih redova, Kompleksni Fourierov red

Kompleksni Fourierov red definiran je kao:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{n2\pi t}{T}}, \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \tag{9.1}$$

a koeficijenti kompleksnog Fourierovog reda su:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt. \tag{9.2}$$

Linijski spektar periodičnog signala:

$$c_n = |c_n|\, e^{j\arg(c_n)} \tag{9.3}$$

pri čemu je:

$$|c_n| = \sqrt{\mathrm{Re}\{c_n\}^2 + \mathrm{Im}\{c_n\}^2} \tag{9.4}$$

i

$$\arg(c_n) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{c_n\}}{\mathrm{Re}\{c_n\}}\right). \tag{9.5}$$

Veza između koeficijenata Fourierovog reda i Kompleksnog Fourierovog reda je:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}, c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} \tag{9.6}$$

Trigonometrijski Fourierov red periodične funkcije $f(t)$ s osnovnom kružnom frekvencijom ω_0 može se zapisati i kao:

$$f(t) = \pm\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(n\omega_0 t + \varphi_n) \tag{9.7}$$

pri čemu je:

$$\begin{aligned} &\alpha_0 = |a_0| \\ &\alpha_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ &\tan \varphi_n = \tfrac{a_n}{b_n}. \end{aligned} \tag{9.8}$$

Paresevalova jednakost dana je relacijom:

$$P = \frac{1}{T} \int_T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \tag{9.9}$$

Jednakost (9.9) koristi se za računanje srednje snage signala.

Primjer 9.1 Periodična funkcija $f(t)$ razvijena je u Fourierov red prikazan izrazom:

$$f(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} ((-1)^n - 1) \cos nt - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^n \sin nt.$$

Odredite srednju vrijednost funkcije, koeficijent Fourierovog reda a_0, osnovnu kružnu frekvenciju i osnovni period, amplitudu i fazu osnovnog harmonika i amplitudu i fazu četvrtog harmonika.

Rješenje Krenimo od trigonometrijskog Fourierovog reda:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi t}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi t}{T} \right)$$

ili

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos (n\omega_0 t) + b_n \sin (n\omega_0 t)).$$

Srednja vrijednost funkcije sadržana je u članu $\frac{a_0}{2}$. Prema tome, srednja vrijednost signala je $\frac{1}{4}$. Koeficijent a_0 dva puta je veći od srednje vrijednosti signala pa vrijedi:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow a_0 = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Osnovna kružna frekvencija ili osnovni period mogu se izračunati iz općeg trigonometrijskog Fourierovog reda i zadanog trigonometrijskog Fourierovog reda. Osnovnu kružnu frekvenciju možemo izračunati iz argumenta kosinus ili sinus člana $(n\omega_0 t)$ uz uvjet $n = 1$ (osnovni harmonik je onaj harmonik za koji vrijedi da je $n = 1$):

$$\begin{aligned} &\cos (n\omega_0 t) = \cos nt, n = 1 \\ &\cos (\omega_0 t) = \cos t \Rightarrow \omega_0 t = t \Rightarrow \omega_0 = 1. \end{aligned}$$

Prema tome, osnovna je kružna frekvencija $\omega_0 = 1$ rad s^{-1}. Period sada možemo izračunati na dva načina: prvi je iz općeg trigonometrijskog reda koji sadrži period u razvoju Fourierovog reda, a drugi je veza između perioda i kružne frekvencije.

Za prvi slučaj vrijedi:

$$\begin{array}{l} \cos\frac{2n\pi t}{T} = \cos nt, n = 1 \\ \cos\frac{2\pi t}{T} = \cos t \Rightarrow \frac{2\pi t}{T} = t \Rightarrow T = 2\pi. \end{array}$$

Za drugi slučaj vrijedi:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow = T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi.$$

U oba slučaja dobili smo isti rezultat što je bilo i očekivano.

Da bismo izračunali amplitudu i fazu osnovnog (prvog) harmonika, moramo iz Fourierovog reda izračunati koeficijente a_n i b_n pa vrijedi:

$$\begin{array}{l} a_n = \frac{1}{\pi^2 n^2}\left((-1)^n - 1\right) \\ b_n = -\frac{1}{\pi n}(-1)^n. \end{array}$$

Za $n = 1$ vrijedi:

$$\begin{array}{l} a_1 = \frac{1}{\pi^2 1^2}\left((-1)^1 - 1\right) = -\frac{2}{\pi^2} \\ b_1 = -\frac{1}{\pi\cdot 1}(-1)^1 = \frac{1}{\pi}. \end{array}$$

Amplituda i faza n-tog harmonika je:

$$\begin{array}{l} \alpha_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ \tan\varphi_n = \frac{a_n}{b_n}. \end{array}$$

Prema tome, amplituda osnovnog (prvog) harmonika je:

$$\alpha_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \sqrt{\left(-\frac{2}{\pi^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\pi}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{\pi^4} + \frac{1}{\pi^2}} = 0.3773.$$

Faza osnovnog (prvog) harmonika je:

$$\tan\varphi_1 = \frac{a_1}{b_1} = \frac{-\frac{2}{\pi^2}}{\frac{1}{\pi}} = \frac{-2}{\pi} \Rightarrow \varphi_1 = \arctan\left(\frac{-2}{\pi}\right) = -0.5669 = -32.48°.$$

Za $n = 4$ vrijedi:

$$\begin{array}{l} a_4 = \frac{1}{\pi^2 4^2}\left((-1)^4 - 1\right) = 0 \\ b_4 = -\frac{1}{\pi\cdot 4}(-1)^4 = -\frac{1}{4\pi}. \end{array}$$

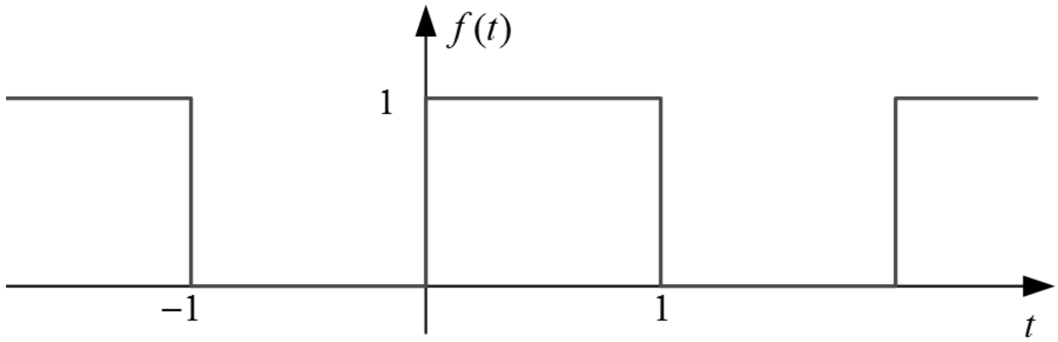
Prema tome, amplituda četvrtog harmonika je:

$$\alpha_4 = \sqrt{a_4^2 + b_4^2} = \sqrt{(0)^2 + \left(-\frac{1}{4\pi}\right)^2} = \frac{1}{4\pi} = 0.0796.$$

Faza četvrtog harmonika je:

$$\tan\varphi_4 = \frac{a_4}{b_4} = \frac{0}{-\frac{1}{4\pi}} = 0 \Rightarrow \varphi_1 = \arctan\left(\frac{0}{-1}\right) = -\pi = -180°.$$

Primjer 9.2 Periodičnu funkciju $f(t)$ zadanu slikom 9.1 razvijte u Kompleksni Fourierov red.



Slika 9.1: Funkcija $f(t)$

Izračunajte koeficijent c_0.

Rješenje Period funkcije $f(t)$ iznosi $T = 2$ s. Prema tome, za kružnu frekvenciju vrijedi:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Kompleksni Fourierov red glasi:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\pi t}.$$

Matematički se funkcija $f(t)$ (slika 9.1) može zapisati kao:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & za \quad -1 \leq t < 0 \\ 1 & za \quad 0 \leq t < 1 \end{cases}.$$

Koeficijente kompleksnog Fourierovog reda računat ćemo prema sljedećoj relaciji:

$$c_n = \tfrac{1}{T}\int_T f(t)e^{-jn\pi t}dt = \tfrac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(t)e^{-jn\pi t}dt = \tfrac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0} f(t)e^{-jn\pi t}dt + \tfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} f(t)e^{-jn\pi t}dt$$
$$c_n = \tfrac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} 1\cdot e^{-jn\pi t}dt = \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{-jn\pi}\, e^{-jn\pi t}\big|_0^1 = \tfrac{1}{-j2n\pi}\left(e^{-jn\pi\cdot 1} - e^{-jn\pi\cdot 0}\right)$$
$$c_n = \tfrac{1}{-j2n\pi}\left(e^{-jn\pi} - 1\right).$$

Ovdje bismo mogli stati s izračunom koeficijenta c_n, ali ovaj izraz možemo i dodatno pojednostavniti:

$$c_n = \tfrac{1}{-j2n\pi}\left(e^{-jn\pi} - 1\right) = \tfrac{e^{-\frac{jn\pi}{2}}}{-j2n\pi}\left(e^{-\frac{jn\pi}{2}} - e^{\frac{jn\pi}{2}}\right) = \tfrac{e^{-\frac{jn\pi}{2}}}{n\pi}\left(\tfrac{e^{\frac{jn\pi}{2}} - e^{-\frac{jn\pi}{2}}}{j2}\right)$$
$$c_n = \tfrac{e^{-\frac{jn\pi}{2}}}{n\pi}\sin\left(\tfrac{n\pi}{2}\right).$$

Prema tome, kompleksni Fourierov red periodične funkcije sa slike 9.1 je:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\pi t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{-j2n\pi}\left(e^{-jn\pi}-1\right)e^{jn\pi t}$$

ili na drugi način:

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\pi t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{jn\pi}{2}}}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)e^{jn\pi t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)e^{jn\pi t-\frac{jn\pi}{2}}$$
$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)e^{jn\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)}.$$

Sada je potrebno odrediti koeficijent c_0:

$$c_0=\lim_{n\to 0} c_n=\lim_{n\to 0}\frac{e^{-\frac{jn\pi}{2}}}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)=\lim_{n\to 0}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi}=\frac{0}{0}.$$

Dobiveni je izraz neodređen jer imamo izraz $0/0$. U skladu s tim primijenit ćemo L'Hôpitalovo pravilo:

$$c_0=\lim_{n\to 0}\frac{\frac{d}{dn}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)}{\frac{d}{dn}\left(n\pi\right)}=\lim_{n\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\pi}=\frac{1}{2}.$$

Koeficijent c_0 je srednja vrijednost signala što se vidi i na slici 9.1.

Primjer 9.3 Ako je koeficijent c_n Fourierovog reda jednak:

$$c_n=\frac{j}{2n\pi}\left(e^{-jn\pi}-1\right),$$

odredite koeficijente trigonometrijskog Fourierovog reda a_0, a_n i b_n i zapišite trigonometrijski red funkcije $f(t)$. Osnovna kružna frekvencija je $\omega_0=\pi$ rad s^{-1}.

Rješenje: Za koeficijente kompleksnog Fourierovog reda vrijedi:

$$c_0=\frac{a_0}{2}, c_n=\frac{a_n-jb_n}{2}, c_{-n}=\frac{a_n+jb_n}{2}.$$

Prema tome, koeficijent a_0 je:

$$a_0=2c_0,$$

a koeficijenti a_n i b_n su:

$$\left.\begin{array}{l} c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \\ c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} \end{array}\right\} +$$
$$c_n + c_{-n} = \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{2} = a_n$$
$$a_n = c_n + c_{-n}$$

$$\left.\begin{array}{l} c_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \\ c_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} \end{array}\right\} -$$
$$c_n - c_{-n} = -j\frac{b_n}{2} - j\frac{b_n}{2} = -jb_n / \cdot j$$
$$b_n = j(c_n - c_{-n}).$$

Ako je c_n jednak:

$$c_n = \frac{j}{2n\pi}\left(e^{-jn\pi} - 1\right),$$

tada je c_{-n} jednak (samo n zamijenimo s $-n$ u koeficijentu c_n):

$$c_{-n} = -\frac{j}{2n\pi}\left(e^{jn\pi} - 1\right).$$

Redom računamo koeficijente:

$$a_0 = 2c_0 = \lim_{n\to 0} 2c_n = \lim_{n\to 0} \frac{j2}{2n\pi}\left(e^{-jn\pi} - 1\right) = \frac{0}{0}$$
$$a_0 = \lim_{n\to 0} \frac{j\frac{d}{dn}\left(e^{-jn\pi} - 1\right)}{\frac{d}{dn}(n\pi)} = \lim_{n\to 0} \frac{j\cdot(-j\pi)e^{-jn\pi}}{\pi} = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{j}{2n\pi}\left(e^{-jn\pi} - 1\right) - \frac{j}{2n\pi}\left(e^{jn\pi} - 1\right)$$
$$a_n = \frac{j}{2n\pi}\left(e^{-jn\pi} - 1 - e^{jn\pi} + 1\right) = -\frac{j}{2n\pi}\left(e^{jn\pi} - e^{-jn\pi}\right) = \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi) = 0$$

$$b_n = j\left(c_n - c_{-n}\right) = j\left(\frac{j}{2n\pi}\left(e^{-jn\pi} - 1\right) + \frac{j}{2n\pi}\left(e^{jn\pi} - 1\right)\right)$$
$$b_n = j\frac{j}{2n\pi}\left(e^{-jn\pi} - 1 + e^{jn\pi} - 1\right) = -\frac{1}{2n\pi}\left(e^{-jn\pi} + e^{jn\pi} - 2\right)$$
$$b_n = -\frac{1}{n\pi}\left(\frac{e^{-jn\pi} + e^{jn\pi}}{2} - 1\right) = -\frac{1}{n\pi}\left(\cos(n\pi) - 1\right).$$

S obzirom da je $\omega_0 = \pi$, trigonometrijski Fourierov red imao bi oblik:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(n\omega_0 t) + b_n\sin(n\omega_0 t)\right)$$
$$f(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi}\left(\cos(n\pi) - 1\right)\sin(n\pi t).$$

Primjer 9.4 Za zadanu periodičnu funkciju $f(t)$:

$$f(t) = \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + \sin(\pi t) - \sin\left(\frac{8\pi}{6}t\right) + 2\cos(3\pi t)$$

odredite koeficijente Fourierovog reda i odredite srednju snagu signala.

Rješenje Osnovna kružna frekvencija funkcije $f(t)$ je $\omega_0 = \pi/3$ [1].

Zapišimo funkciju $f(t)$ tako da sadrži višekratnike osnovne frekvencije:

$$f(t) = \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + \sin\left(3\frac{\pi}{3}t\right) - \sin\left(4\frac{\pi}{3}t\right) + 2\cos\left(9\frac{\pi}{3}t\right).$$

Transformirajmo funkciju $f(t)$ u eksponencijalni oblik koristeći Eulerove formule:

$$\begin{array}{l} \cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}}{2} \\ \sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t}}{2j}. \end{array}$$

Transformirani oblik funkcije je:

$$f(t) = \frac{e^{j\frac{\pi}{3}t} + e^{-j\frac{\pi}{3}t}}{2} + \frac{e^{j3\frac{\pi}{3}t} - e^{-j3\frac{\pi}{3}t}}{2j} - \frac{e^{j4\frac{\pi}{3}t} - e^{-j4\frac{\pi}{3}t}}{2j} + 2\frac{e^{j9\frac{\pi}{3}t} + e^{-j9\frac{\pi}{3}t}}{2}.$$

Sortirajmo sada u funkciji $f(t)$ višekratnike osnovne frekvencije od najmanjeg do najvećeg:

$$f(t) = e^{-j9\frac{\pi}{3}t} + \frac{e^{-j4\frac{\pi}{3}t}}{2j} - \frac{e^{-j3\frac{\pi}{3}t}}{2j} + \frac{e^{-j\frac{\pi}{3}t}}{2} + \frac{e^{j\frac{\pi}{3}t}}{2} + \frac{e^{j3\frac{\pi}{3}t}}{2j} - \frac{e^{j4\frac{\pi}{3}t}}{2j} + e^{j9\frac{\pi}{3}t}.$$

Iz ovog oblika funkcije lako uočavamo koeficijente:

$$\begin{array}{l} c_{-9} = 1, c_{-4} = \frac{1}{2j}, c_{-3} = -\frac{1}{2j}, c_{-1} = \frac{1}{2} \\ c_1 = \frac{1}{2}, c_3 = \frac{1}{2j}, c_4 = \frac{1}{2j}, c_9 = 1. \end{array}$$

Svi ostali koeficijenti c_n jednaki su 0. Srednju snagu signala (funkcije) odredit ćemo koristeći Parsevalovu jednakost:

$$P = \frac{1}{T}\int_T |f(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2,$$

odnosno:

$$P = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = c_{-9}^2 + c_{-4}^2 + c_{-3}^2 + c_{-1}^2 + c_1^2 + c_3^2 + c_4^2 + c_9^2$$
$$P = (|1|)^2 + \left(\left|\frac{1}{2j}\right|\right)^2 + \left(\left|-\frac{1}{2j}\right|\right)^2 + \left(\left|\frac{1}{2}\right|\right)^2 + \left(\left|\frac{1}{2}\right|\right)^2 + \left(\left|\frac{1}{2j}\right|\right)^2 + \left(\left|-\frac{1}{2j}\right|\right) + (|1|)^2$$
$$P = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{14}{4}.$$

[1] U cijelom zbroju sinus i kosinus funkcija pronađe se sinus/kosinus funkcija s najmanjom kružnom frekvencijom. Sve ostale kružne frekvencije sinus i kosinus funkcija moraju biti veće od osnovne frekvencije n puta gdje je $n > 1$. Ako nije tako, signal nije periodičan i nije ga moguće razviti u Fourierov red

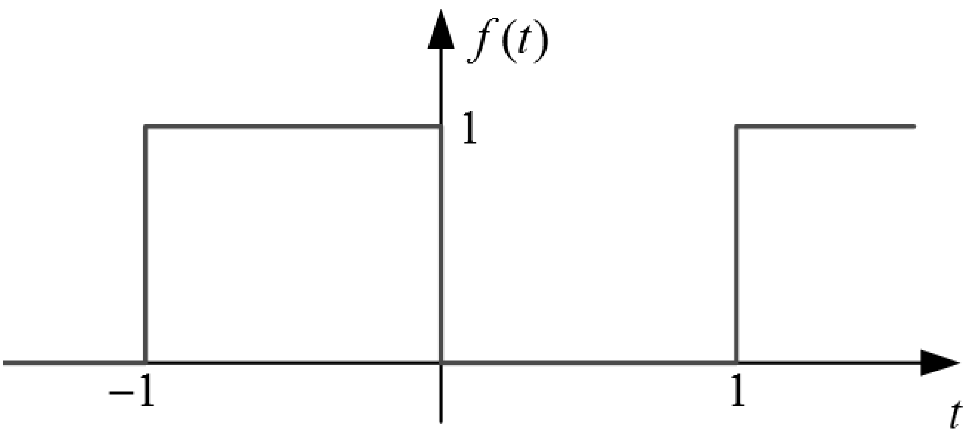
9.1 Zadaci za vježbu

Zadatak 9.1 Periodična funkcija $f(t)$ razvijena je u Fourierov red prikazan izrazom:

$$f(t) = \frac{4}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(-\frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \cos \frac{n\pi t}{2} + \left(\frac{1}{n\pi}(-1)^n + \frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{3}{n\pi} \right) \sin \frac{n\pi t}{2} \right).$$

Odredite srednju vrijednost funkcije, koeficijent Fourierovog reda a_0, osnovnu kružnu frekvenciju i osnovni period, amplitudu i fazu osnovnog harmonika i amplitudu i fazu trećeg harmonika.

Zadatak 9.2 Periodičnu funkciju $f(t)$ zadanu slikom 9.2 razvijte u kompleksni Fourierov red.



Slika 9.2: Funkcija $f(t)$

Izračunajte koeficijent c_0.

Zadatak 9.3 Ako je koeficijent c_n Fourierovog reda jednak:

$$c_n = \frac{j}{2n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$

odredite koeficijente trigonometrijskog Fourierovog reda a_0, a_n i b_n i zapišite trigonometrijski red funkcije $f(t)$. Osnovna kružna frekvencija je $\omega_0 = \pi$ rad s^{-1}.

Zadatak 9.4 Za zadanu periodičnu funkciju $f(t)$:

$$f(t) = \cos(2\pi t) + 3\sin(\pi t) + \sin(3\pi t) - 2\cos(3\pi t)$$

odredite koeficijente Fourierovog reda i odredite srednju snagu signala.

Poglavlje 10

Fourierova transformacija

Transformacijski par dvostrane Fourierove transformacije je:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \tag{10.1}$$

i

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega. \tag{10.2}$$

Jednostrana Fourierova transformacija definirana je kao:

$$X(j\omega) = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt. \tag{10.3}$$

Frekvencijska karakteristika definirana je izrazom:

$$X(j\omega) = |X(j\omega)|\, e^{j\arg(X(j\omega))}. \tag{10.4}$$

Parsevalova jednakost za energiju signala je:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega. \tag{10.5}$$

Zbog sličnosti Laplaceove i Fourierove transformacije sva svojstva koja vrijede za Laplaceovu transformaciju vrijede i za Fourierovu transformaciju uz supstituciju $s = j\omega$:

$$X(j\omega) = X(s)|_{s=j\omega} = \left. \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \right|_{s=j\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt. \tag{10.6}$$

Fourierov transformat prijenosne funkcije $G(j\omega)$ prema (10.6) je:

$$G(j\omega) = \int_{0}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt \tag{10.7}$$

i naziva se frekvencijska karakteristika sustava za koju vrijedi:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|\, e^{j\arg(G(j\omega))}, \tag{10.8}$$

gdje je:

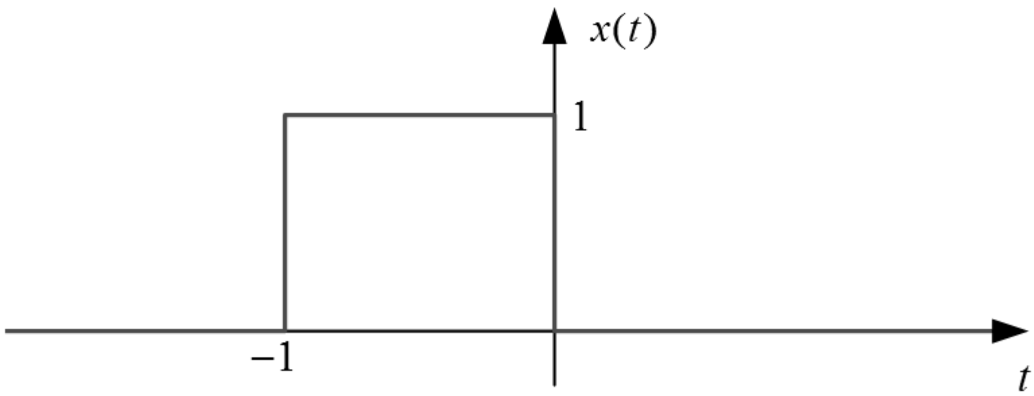
- $|G(j\omega)|$ amplitudno frekvencijska karakteristika sustava $G(s)$,
- $\arg(G(j\omega))$ fazno frekvencijska karakteristika sustava $G(s)$.

Transformacijski parovi koji su bitni, a nisu obuhvaćeni Laplaceovom transformacijom su:

$$1 \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega)$$

$$e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega - \omega_0).$$

Primjer 10.1 Na aperiodični signal $x(t)$ zadan slikom 10.1 primijenite Fourierovu transformaciju.



Slika 10.1: Signal $x(t)$

Rješenje Aperiodični signali imaju kontinuirani spektar i na njih primjenjujemo Fourierovu transformaciju prema definiciji:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt.$$

Matematički se signal sa slike 10.1 može prikazati kao:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & za \quad -1 \le t < 0 \\ 0 & za \quad t < -1 \wedge t \ge 0 \end{cases}.$$

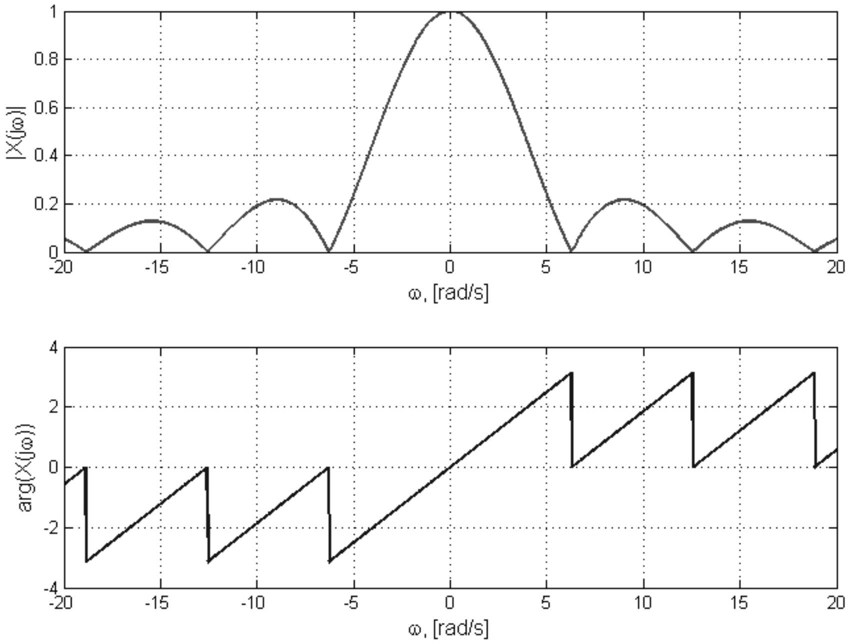
Obratite pozornost na to da signal $x(t)$ nije periodičan. Primijenimo sada Fourierovu transformaciju:

$$X(j\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt=\int\limits_{-1}^{0} 1\cdot e^{-j\omega t}dt=\tfrac{1}{-j\omega}\;e^{-j\omega t}\big|_{-1}^{0}=\tfrac{1}{-j\omega}\left(1-e^{j\omega}\right)$$
$$X(j\omega)=\tfrac{2e^{j\frac{\omega}{2}}}{-j2\omega}\left(e^{-j\frac{\omega}{2}}-e^{j\frac{\omega}{2}}\right)=\tfrac{2e^{j\frac{\omega}{2}}}{\omega}\left(\tfrac{e^{j\frac{\omega}{2}}-e^{-j\frac{\omega}{2}}}{j2}\right)=\tfrac{2e^{j\frac{\omega}{2}}}{\omega}\sin\left(\tfrac{\omega}{2}\right).$$

Frekvencijska karakteristika signala $x(t)$ može se izračunati prema relacijama:

$$|X(j\omega)|=\sqrt{\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}^2+\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}^2}$$
$$\arg(X(j\omega))=\arctan\left(\tfrac{\mathrm{Im}\{X(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{X(j\omega)\}}\right),$$

a ima oblik (slika 10.2):



Slika 10.2: Frekvencijska karakteristika signala $x(t)$

Primjer 10.2 Odredite Fourierovu transformaciju jedinične skokovite stepenice:

$$\mu(t)=\begin{cases}1 & za \quad t\geq 0\\ 0 & za \quad t<0\end{cases}.$$

Rješenje Na jediničnu skokovitu funkciju primijenimo Fourierovu transformaciju:

$$X(j\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt=\int\limits_{-\infty}^{0} \mu(t)e^{-j\omega t}dt+\int\limits_{0}^{\infty}\mu(t)e^{-j\omega t}dt=\int\limits_{0}^{\infty}1\cdot e^{-j\omega t}dt$$
$$X(j\omega)=-\tfrac{1}{j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{0}^{\infty}=-\tfrac{1}{j\omega}\left(0-1\right)=\tfrac{1}{j\omega}.$$

Fourierova transformacija dobivena je po definiciji. Fourierova transformacija specijalan je slučaj Laplaceove transformacije kada je $s = j\omega$. Za jediničnu skokovitu funkciju vrijedi da je njezin Laplaceov transformat:

$$X(s) = \frac{1}{s}.$$

Uvođenjem supstitucije $s = j\omega$ dobit ćemo:

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega}.$$

Primjer 10.3 Koristeći Fourierovu transformaciju odredite spektar $X(j\omega)$ ako je zadan signal $x(t)$:

$$x(t) = \sin(\pi t).$$

Rješenje U ovom zadatku koristit ćemo transformacijski par:

$$\frac{1}{2\pi}e^{j\omega_0 t} \overset{F}{\longleftrightarrow} \delta(\omega - \omega_0)$$
$$e^{j\omega_0 t} \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega - \omega_0).$$

Prema tome, koristeći Eulerove formule,zapisat ćemo sinus funkciju u eksponencijalnom obliku:

$$x(t) = \sin(\pi t) = \frac{e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}}{2j}\frac{j}{j} = -j\frac{e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}}{2}.$$

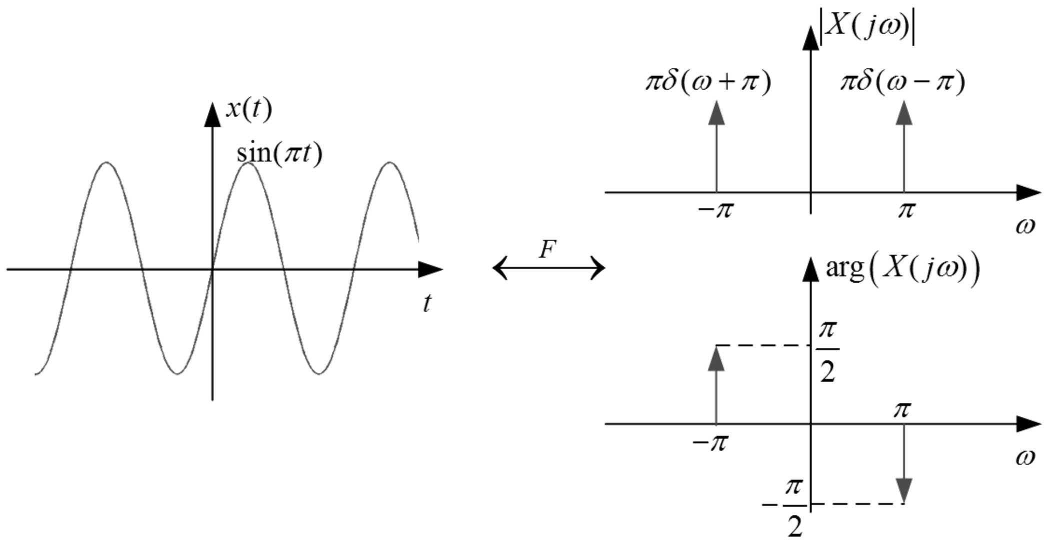
Iskoristimo sada navedene transformacijske parove

$$e^{j\pi t} \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega - \pi)$$
$$e^{-j\pi t} \overset{F}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega + \pi).$$

Slijedi:

$$\sin(\pi t) = -j\frac{e^{j\pi t} - e^{-j\pi t}}{2} \overset{F}{\longleftrightarrow}$$
$$\overset{F}{\longleftrightarrow} -j\frac{2\pi\delta(\omega - \pi) - 2\pi\delta(\omega + \pi)}{2} = -j\pi\delta(\omega - 3) + j\pi\delta(\omega + 3).$$

Spektar signala $x(t)$ prikazan je na slici 10.3. Zašto je graf baš ovakvog oblika? Na prvom dijelu frekvencijske karakteristike nacrtana je apsolutna vrijednost komponenata spektra $X(j\omega)$. Drugi dio frekvencijske karakteristike prikazuje faznu karakteristiku. S obzirom da su obje komponente spektra $X(j\omega)$ imaginarne, fazni je pomak signala $\frac{\pi}{2}$. Predznak ispred j određuje predznak faze. Kosinus funkcije imaju samo realne komponente pa stoga nema faznog pomaka. Prema tome, samo je u tom slučaju $|X(j\omega)| = X(j\omega)$. Budući da je fazni pomak jednak nuli, nije potrebno crtati fazni dijagram.



Slika 10.3: Frekvencijska karakteristika (spektar) signala $x(t) = \sin(\pi t)$

Primjer 10.4 Sustav je opisan prijenosnom funkcijom:

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 2}.$$

Odredite frekvencijsku karakteristiku sustava $G(j\omega)$.

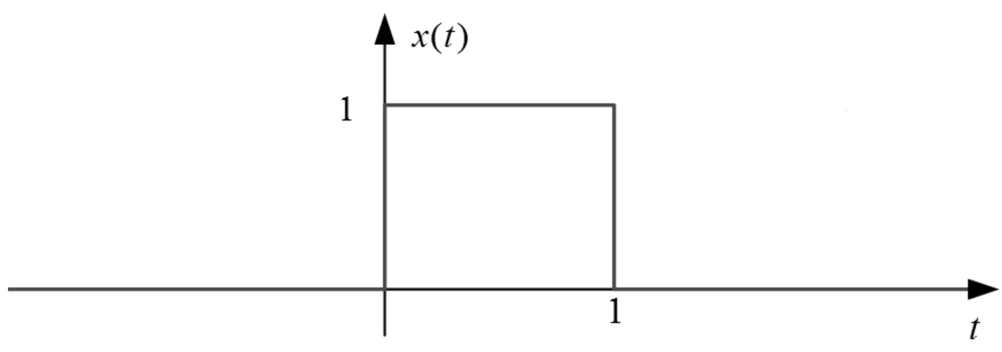
Rješenje Da bismo odredili frekvencijsku karakteristiku sustava $G(j\omega)$, u opisu je sustava $G(s)$ potrebno napraviti samo supstituciju $s = j\omega$:

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = \left.\frac{s}{s^2 + 2s + 2}\right|_{s=j\omega} = \frac{j\omega}{(j\omega)^2 + 2j\omega + 2}$$

$$G(j\omega) = \frac{j\omega}{2 - \omega^2 + 2j\omega}.$$

10.1 Zadaci za vježbu

Zadatak 10.1 Na aperiodični signal $x(t)$ zadan slikom 10.4 primijenite Fourierovu transformaciju.



Slika 10.4: Signal $x(t)$

Zadatak 10.2 Odredite Fourierovu transformaciju jedinične rampe:

$$r(t) = \begin{cases} t & za \quad t \geq 0 \\ 0 & za \quad t < 0 \end{cases}.$$

Zadatak 10.3 Koristeći Fourierovu transformaciju odredite spektar $X(j\omega)$ ako je zadan signal $x(t)$:

$$x(t) = \cos(\pi t) + \sin(2\pi t).$$

Zadatak 10.4 Sustav je opisan prijenosnom funkcijom:

$$G(s) = \frac{s^2 + 2}{s^3 + 2s^2 + 2s + 3}.$$

Odredite frekvencijsku karakteristiku sustava $G(j\omega)$.

Poglavlje 11

Linearne diferencijske jednadžbe

11.1 Homogene linearne diferencijske jednadžbe

Sustavi koje ćemo opisivati linearnim diferencijskim jednadžbama diskretni su linearni i vremenski nepromjenjivi sustavi. Opća linearna diferencijska jednadžba ima sljedeći oblik:

$$a_0y[k]+...+a_{n-1}y[k-n+1]+a_ny[k-n] = b_0u[k]+...+b_{m-1}u[k-m+1]+b_mu[k-m], \tag{11.1}$$

gdje su:

- $a_n, a_{n-1}, ..., a_0, b_m, b_{m-1}, ..., b_o$ konstantni parametri linearne diferencijske jednadžbe,
- n red linearne diferencijske jednadžbe, $n \geq m$.

Desnu stranu izraza (11.1) označimo s $f[k]$:

$$f[k] = b_0u[k] + ... + b_{m-1}u[k-m+1] + b_mu[k-m]. \tag{11.2}$$

Totalni odziv sustava opisanog linearnom diferencijskom jednadžbom zbroj je homogenog $y_h[k]$ i partikularnog $y_p[k]$ rješenja:

$$y[k] = y_h[k] + y_p[k]. \tag{11.3}$$

Linearna diferencijska jednadžba za koju vrijedi $f[k] = 0$ naziva se homogena diferencijska jednadžba (11.4):

$$a_0y[k] + a_1y[k-1] + ... + a_{n-1}y[k-n+1] + a_ny[k-n] = 0. \tag{11.4}$$

Homogena linearna diferencijska jednadžba nema partikularnog rješenja ($y_p[k] = 0$). Za homogenu linearnu diferencijsku jednadžbu pretpostavlja se homogeno rješenje:

$$y_h[k] = Cq^k \tag{11.5}$$

koje uvrstimo u linearnu diferencijsku jednadžbu (11.4) te izračunamo karakteristične vrijednosti (korijene) linearne diferencijske jednadžbe:

$$\begin{aligned}
&a_n y[k] + ... + a_2 y[k-n+2] + a_1 y[k-n+1] + a_0 y[k-n] = 0\\
&a_n C q^k + ... + a_2 C q^{k-n+2} + a_1 C q^{k-n+1} + a_0 C q^{k-n} = 0\\
&a_n C q^k + ... + a_2 C q^k q^{-n+2} + a_1 C q^k q^{-n+1} + a_0 C q^k q^{-n} = 0 / \cdot q^n\\
&a_n C q^{k+n} + ... + a_2 C q^{k+2} + a_1 C q^{k+1} + a_0 C q^k = 0\\
&C q^k \left(a_n q^n + ... + a_2 q^2 + a_1 q + a_0\right) = 0\\
&a_n q^n + ... + a_2 q^2 + a_1 q + a_0 = 0.
\end{aligned} \tag{11.6}$$

Homogena rješenja linearne diferencijske jednadžbe ovise o karakterističnim vrijednostima:

$$a_n q^n + ... + a_2 q^2 + a_1 q^1 + a_0 = 0. \tag{11.7}$$

- Ako su korijeni realni i različiti, pretpostavljeno homogeno rješenje je:

$$\begin{aligned}
y_h[k] &= \sum_{i=1}^{n} C_i q_i^k\\
y_h[k] &= C_1 q_1^k + C_2 q_2^k + ... + C_n q_n^k.
\end{aligned}$$

- Ako su korijeni realni i višestruki, pretpostavljeno homogeno rješenje je:

$$\begin{aligned}
y_h[k] &= \left(C_1 + C_2 k + ... + C_j k^{j-1}\right) q_1^k + \sum_{i=j+1}^{n} C_i q_i^k\\
y_h[k] &= \left(C_1 + C_2 k + ... + C_j k^{j-1}\right) q_1^k + C_{j+1} q_{j+1}^k + ... + C_n q_n^k.
\end{aligned}$$

- Ako su korijeni q_1 i q_2 konjugirano kompleksni, pretpostavljeno homogeno rješenje je:

$$\begin{aligned}
y_h[k] &= r^k \left(C_1 \sin(\omega k) + C_2 \cos(\omega k)\right) + \sum_{i=3}^{n} C_i q_i^k\\
y_h[k] &= r^k \left(C_1 \sin(\omega k) + C_2 \cos(\omega k)\right) + C_3 q_3^k + ... + C_n q_n^k.
\end{aligned}$$

  gdje su:

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{\operatorname{Re}\{q_1\}^2 + \operatorname{Im}\{q_1\}^2}\\
\omega &= \arctan\left[\frac{\operatorname{Im}\{q_1\}}{\operatorname{Re}\{q_1\}}\right].
\end{aligned}$$

Nakon što pronađemo homogeno rješenje linearne diferencijske jednadžbe, nepoznate koeficijente $C_1, C_2, C_3, ..., C_n$ računamo na temelju početnih uvjeta:

$$y[-1], y[-2], y[-3], ..., y[-n]. \tag{11.8}$$

Početne uvjete uvrstimo u sljedeći set jednadžbi (ukoliko su korijeni jednostruki i realni):

$$
\begin{aligned}
&y[-1] = C_1 q_1^{-1} + C_2 q_2^{-1} + ... + C_n q_n^{-1} \\
&y[-2] = C_1 q_1^{-2} + C_2 q_2^{-2} + ... + C_n q_n^{-2} \\
&. \\
&. \\
&. \\
&y[-n] = C_1 q_1^{-n} + C_2 q_2^{-n} + ... + C_n q_n^{-n}.
\end{aligned}
\tag{11.9}
$$

Izraz (11.9) predstavlja sustav s n jednadžbi i n nepoznanica (koeficijenata C_1, C_2, C_3,..., C_n). Diferencijske jednadžbe mogu se riješiti i koračnom metodom. Ova metoda zasniva se na računanju sljedećeg stanja $y[k]$ na temelju prethodnih stanja korištenjem jednadžbe diferencije (11.4):

$$
\begin{aligned}
&a_0 y[k] + a_1 y[k-1] + ... + a_{n-1} y[k-n+1] + a_n y[k-n] = 0 \\
&a_0 y[k] = -a_1 y[k-1] - ... - a_{n-1} y[k-n+1] - a_n y[k-n] / : a_0 \\
&y[k] = -\frac{a_1}{a_0} y[k-1] - ... - \frac{a_{n-1}}{a_0} y[k-n+1] - \frac{a_n}{a_0} y[k-n].
\end{aligned}
\tag{11.10}
$$

U izraz (11.10) redom uvrstimo $k = 0, 1, 2, ..., j$ te dobijemo:

$$
\begin{aligned}
&y[0] = -\frac{a_1}{a_0} y[-1] - ... - \frac{a_{n-1}}{a_0} y[-n+1] - \frac{a_n}{a_0} y[-n] \\
&y[1] = -\frac{a_1}{a_0} y[0] - ... - \frac{a_{n-1}}{a_0} y[-n+2] - \frac{a_n}{a_0} y[-n+1] \\
&. \\
&. \\
&. \\
&y[j] = -\frac{a_1}{a_0} y[j-1] - ... - \frac{a_{n-1}}{a_0} y[j-n+1] - \frac{a_n}{a_0} y[j-n].
\end{aligned}
\tag{11.11}
$$

Primjer 11.1.1 Sustav je opisan homogenom diferencijskom jednadžbom (nepobuđen sustav):

$$y[k] - \frac{5}{6} y[k-1] + \frac{1}{6} y[k-2] = 0.$$

Početni su uvjeti: $y[-1] = 2$, $y[-2] = -1$. Odredite rješenje homogene linearne diferencijske jednadžbe (homogeni odziv sustava).

Rješenje Pretpostavljamo homogeno rješenje $y_h[k] = Cq^k$. Pretpostavljeno rješenje uvrstimo u homogenu diferencijsku jednadžbu te tako dobijemo karakterističnu jednadžbu:

$$
\begin{aligned}
&y[k]-\frac{5}{6}y[k-1]+\frac{1}{6}y[k-2]=0\\
&y_h\,[k]=Cq^k, y_h\,[k-1]=Cq^{k-1}, y_h\,[k-2]=Cq^{k-2}\\
&Cq^k-\frac{5}{6}Cq^{k-1}+\frac{1}{6}Cq^{k-2}=0/\cdot q^2\\
&Cq^k\left(q^2-\frac{5}{6}q+\frac{1}{6}\right)=0\\
&q^2-\frac{5}{6}q+\frac{1}{6}=0.
\end{aligned}
$$

Rješenjem karakteristične jednadžbe možemo izračunati korijene karakteristične jednadžbe te dobiti opće rješenje homogene diferencijske jednadžbe:

$$
\begin{aligned}
&q_{1,2}=\frac{\frac{5}{6}\pm\sqrt{\frac{25}{36}-\frac{4}{6}}}{2}=\frac{\frac{5}{6}\pm\sqrt{\frac{25}{36}-\frac{24}{36}}}{2}=\frac{\frac{5}{6}\pm\frac{1}{6}}{2}\\
&q_1=\frac{1}{2}, q_2=\frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

Korijeni karakteristične jednadžbe su realni i različiti pa pretpostavljamo sljedeće homogeno rješenje:

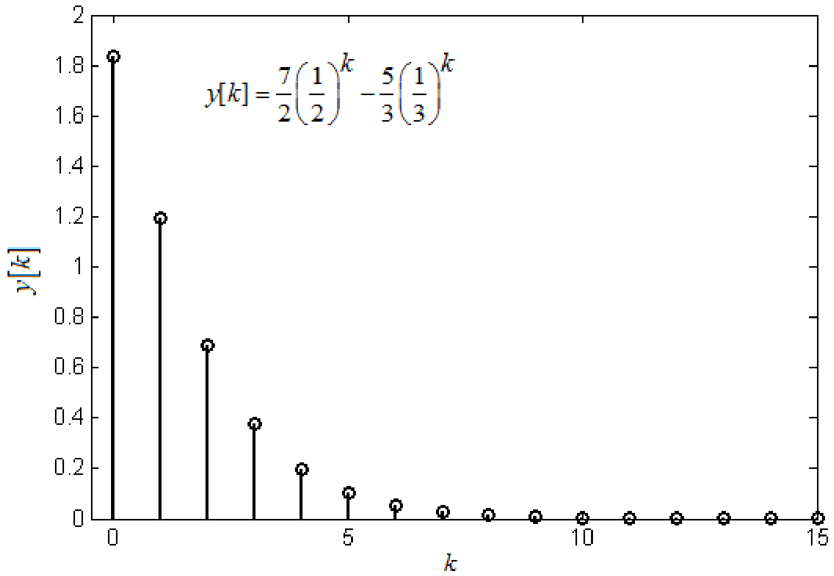
$$
\begin{aligned}
&y_h[k]=C_1{q_1}^k+C_2{q_2}^k\\
&y_h[k]=C_1\left(\frac{1}{2}\right)^k+C_2\left(\frac{1}{3}\right)^k.
\end{aligned}
$$

U opće homogeno rješenje uvrstimo $k=-1$ i $k=-2$ te izračunamo koeficijente C_1 i C_2:

$$
\begin{aligned}
&y_h[-1]=C_1\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+C_2\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}=2C_1+3C_2=2/\cdot-2\\
&y_h[-2]=C_1\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+C_2\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=4C_1+9C_2=-1\\
&-4C_1-6C_2=-4\\
&\underline{4C_1+9C_2=-1}\\
&3C_2=-5\Rightarrow C_2=-\frac{5}{3}\\
&4C_1=-1-9C_2/:4\\
&C_1=-\frac{1}{4}+\frac{45}{12}=\frac{42}{12}=\frac{7}{2}.
\end{aligned}
$$

Rješenje homogene diferencijske jednadžbe $y[k]-\frac{5}{6}y[k-1]+\frac{1}{6}y[k-2]=0$ je (slika 11.1):

$$
y[k]=y_h[k]=\frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k-\frac{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k.
$$



Slika 11.1: Rješenje homogene diferencijske jednadžbe $y[k]-\frac{5}{6}y[k-1]+\frac{1}{6}y[k-2]=0$, početni uvjeti: $y[-1]=2$, $y[-2]=-1$.

Primjer 11.1.2 Sustav je opisan homogenom diferencijskom jednadžbom (nepobuđen sustav):

$$y[k]-\frac{1}{2}y[k-1]+\frac{1}{16}y[k-2]=0.$$

Početni su uvjeti: $y[-1]=-2$, $y[-2]=0$. Odredite rješenje homogene linearne diferencijske jednadžbe (homogeni odziv sustava).

Rješenje Pretpostavljamo homogeno rješenje $y_h[k]=Cq^k$. Pretpostavljeno rješenje uvrstimo u homogenu diferencijsku jednadžbu te tako dobijemo karakterističnu jednadžbu:

$$\begin{aligned}
&y\left[k\right]-\frac{1}{2}y\left[k-1\right]+\frac{1}{16}y\left[k-2\right]=0\\
&y_h\left[k\right]=Cq^k, y_h\left[k-1\right]=Cq^{k-1}, y_h\left[k-2\right]=Cq^{k-2}\\
&Cq^k-\frac{1}{2}Cq^{k-1}+\frac{1}{16}Cq^{k-2}=0/\cdot q^2\\
&Cq^k\left(q^2-\frac{1}{2}q+\frac{1}{16}\right)=0\\
&q^2-\frac{1}{2}q+\frac{1}{16}=0.
\end{aligned}$$

Rješenjem karakteristične jednadžbe možemo izračunati korijene karakteristične jednadžbe te dobiti opće rješenje homogene diferencijske jednadžbe:

$$
\begin{aligned}
&q^2 - \frac{1}{2}q + \frac{1}{16} = 0 \\
&q_{1,2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{4}{16}}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}}}{2} = \frac{1}{4} \\
&q_1 = \frac{1}{4}, q_2 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Korijeni karakteristične jednadžbe su realni i višestruki (dvostruki) pa pretpostavljamo sljedeće homogeno rješenje:

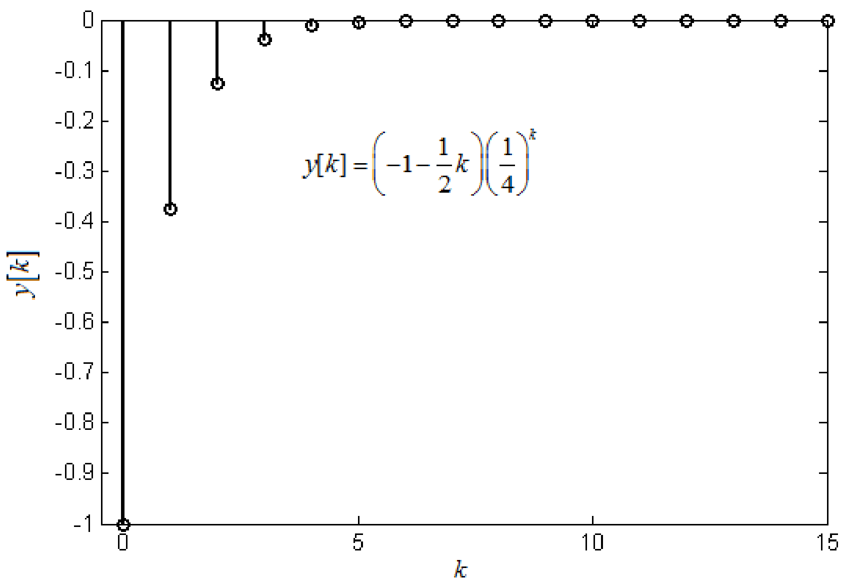
$$
\begin{aligned}
&y_h\left[k\right] = \left(C_1 + C_2 k\right) {q_1}^k \\
&y_h\left[k\right] = \left(C_1 + C_2 k\right) \left(\frac{1}{4}\right)^k.
\end{aligned}
$$

U opće homogeno rješenje uvrstimo $k = -1$ i $k = -2$ te izračunamo koeficijente C_1 i C_2:

$$
\begin{aligned}
&y_h\left[-1\right] = \left(C_1 + C_2\left(-1\right)\right) \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = 4C_1 - 4C_2 = -2 / \cdot \left(-4\right) \\
&y_h\left[-2\right] = \left(C_1 + C_2\left(-2\right)\right) \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16C_1 - 32C_2 = 0 \\
&-16C_1 + 16C_2 = 8 \\
&\underline{16C_1 - 32C_2 = 0} \\
&-16C_2 = 8 \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{2} \\
&16C_1 = 32C_2 \Rightarrow C_1 = 2C_2 = -1.
\end{aligned}
$$

Rješenje homogene diferencijske jednadžbe $y[k] - \frac{1}{2}y[k-1] + \frac{1}{16}y[k-2] = 0$ je (slika 11.2):

$$
y[k] = y_h[k] = \left(-1 - \frac{1}{2}k\right) \left(\frac{1}{4}\right)^k.
$$



Slika 11.2: Rješenje homogene diferencijske jednadžbe $y[k] - \frac{1}{2}y[k-1] + \frac{1}{16}y[k-2] = 0$, početni uvjeti: $y[-1] = -2$, $y[-2] = 0$.

Primjer 11.1.3 Sustav je opisan homogenom diferencijskom jednadžbom (nepobuđen sustav):

$$y[k+2] - y[k+1] + \frac{1}{2}y[k] = 0.$$

Početni su uvjeti: $y[-1] = -1$, $y[-2] = 1$. Odredite rješenje homogene linearne diferencijske jednadžbe (homogeni odziv sustava).

Rješenje U ovom primjeru jednadžba diferencije je nešto drugačija od dosad viđenih. Ona je pomaknuta za dva koraka. Ako napravimo supstituciju $k \to k-2$ dobit ćemo:

$$y\left[k\right] - y\left[k-1\right] + \frac{1}{2}y\left[k-2\right] = 0$$

Za ovu jednadžbu diferencije postupak rješavanja je klasičan. Pretpostavljamo homogeno rješenje $y_h[k] = Cq^k$. Pretpostavljeno rješenje uvrstimo u homogenu diferencijsku jednadžbu te tako dobijemo karakterističnu jednadžbu:

$$\begin{aligned}
&y\left[k\right] - y\left[k-1\right] + \frac{1}{2}y\left[k-2\right] = 0\\
&y_h\left[k\right] = Cq^k, y_h\left[k-1\right] = Cq^{k-1}, y_h\left[k-2\right] = Cq^{k-2}\\
&Cq^k - Cq^{k-1} + \frac{1}{2}Cq^{k-2} = 0/\cdot q^2\\
&Cq^k\left(q^2 - q + \frac{1}{2}\right) = 0\\
&q^2 - q + \frac{1}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Rješenjem karakteristične jednadžbe možemo izračunati korijene karakteristične jednadžbe te dobiti opće rješenje homogene diferencijske jednadžbe:

$$
\begin{aligned}
&q^2 - q + \frac{1}{2} = 0 \\
&q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{2}}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-2}}{2} = \frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2} \\
&q_1 = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}, q_2 = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Korijeni karakteristične jednadžbe su konjugirano kompleksni pa pretpostavljamo sljedeće homogeno rješenje:

$$y_h[k] = r^k \left(C_1 \sin\left(\omega k\right) + C_2 \cos\left(\omega k\right)\right), k \geq 0.$$

Izračunajmo sada r i ω:

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{\mathrm{Re}\left\{q_1\right\}^2 + \mathrm{Im}\left\{q_1\right\}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
\omega &= \arctan\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \arctan\left(1\right) = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

Prema tome, opće rješenje homogene diferencijske jednadžbe je:

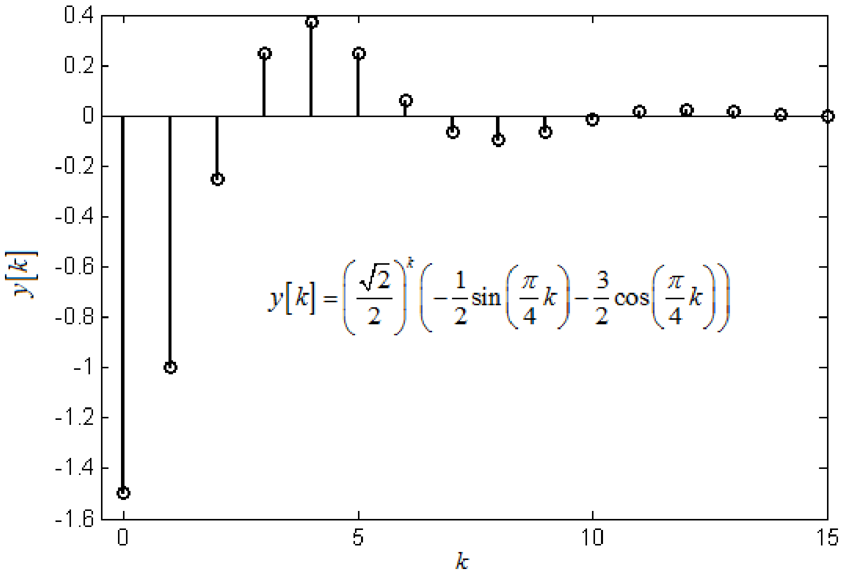
$$y_h[k] = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k \left(C_1 \sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) + C_2 \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right)\right).$$

U opće homogeno rješenje uvrstimo $k = -1$ i $k = -2$ te izračunamo koeficijente C_1 i C_2:

$$
\begin{aligned}
&y_h\left[-1\right] = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-1} \left(C_1 \sin\left(\frac{\pi}{4}\left(-1\right)\right) + C_2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\left(-1\right)\right)\right) = -C_1 + C_2 = -1 \\
&y_h\left[-2\right] = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-2} \left(C_1 \sin\left(\frac{\pi}{4}\left(-2\right)\right) + C_2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\left(-2\right)\right)\right) = -2C_1 = 1 \\
&-C_1 + C_2 = -1 \\
&-2C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2} \\
&C_2 = -1 + C_1 = -\frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

Rješenje homogene diferencijske jednadžbe $y[k] - y[k-1] + \frac{1}{2}y[k-2] = 0$ je (slika 11.3):

$$y\left[k\right] = y_h\left[k\right] = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^k \left(-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) - \frac{3}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right)\right).$$



Slika 11.3: Rješenje homogene diferencijske jednadžbe $y[k] - y[k-1] + \frac{1}{2}y[k-2] = 0$, početni uvjeti: $y[-1] = -1$, $y[-2] = 1$.

Primjer 11.1.4 Sustav je opisan homogenom diferencijskom jednadžbom (nepobuđen sustav):

$$y[k] - \frac{5}{6}y[k-1] + \frac{1}{6}y[k-2] = 0.$$

Početni su uvjeti: $y[-1] = 2$, $y[-2] = -1$. Odredite odziv sustava $y[k]$ u prvih pet koraka ($k = 0, 1, 2, 3, 4$). Provjerite točnost rješenja pomoću rješenja dobivenog u primjeru 11.1.1.

Rješenje Zapišimo zadanu diferencijsku jednadžbu na sljedeći način:

$$y[k] = \frac{5}{6}y[k-1] - \frac{1}{6}y[k-2].$$

Sada je redom potrebno uvrstiti $k = 0, 1, 2, 3, 4$ i koristiti prethodne početne uvjete te rezultate.

$$\begin{aligned}
y[0] &= \frac{5}{6}y[-1] - \frac{1}{6}y[-2] = \frac{5}{6}2 - \frac{1}{6}(-1) = \frac{11}{6} \\
y[1] &= \frac{5}{6}y[0] - \frac{1}{6}y[-1] = \frac{5}{6}\frac{11}{6} - \frac{1}{6}2 = \frac{43}{36} \\
y[2] &= \frac{5}{6}y[1] - \frac{1}{6}y[0] = \frac{5}{6}\frac{43}{36} - \frac{1}{6}\frac{11}{6} = \frac{149}{216} \\
y[3] &= \frac{5}{6}y[2] - \frac{1}{6}y[1] = \frac{5}{6}\frac{149}{216} - \frac{1}{6}\frac{43}{36} = \frac{487}{1296} \\
y[4] &= \frac{5}{6}y[3] - \frac{1}{6}y[2] = \frac{5}{6}\frac{487}{1296} - \frac{1}{6}\frac{149}{216} = \frac{1541}{7776}.
\end{aligned}$$

Napravimo isto uvrštavajući $k = 0, 1, 2, 3, 4$ u rješenje primjera 11.1.1:

$$y_h[k] = \frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k.$$

Dobivamo redom:

$$\begin{aligned}
y[0] &= \frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^0 - \frac{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{7}{2} - \frac{5}{3} = \frac{11}{6} \\
y[1] &= \frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^1 - \frac{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{7}{2}\frac{1}{2} - \frac{5}{3}\frac{1}{3} = \frac{43}{36} \\
y[2] &= \frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{2}\frac{1}{4} - \frac{5}{3}\frac{1}{9} = \frac{149}{216} \\
y[3] &= \frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{7}{2}\frac{1}{8} - \frac{5}{3}\frac{1}{27} = \frac{487}{1296} \\
y[4] &= \frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{7}{2}\frac{1}{16} - \frac{5}{3}\frac{1}{81} = \frac{1541}{7776}.
\end{aligned}$$

Rezultat je isti, kao što je bilo i očekivano.

11.1.1 Zadaci za vježbu

Zadatak 11.1.1 Sustav je opisan homogenom diferencijskom jednadžbom (nepobuđen sustav):

$$y[k] + \frac{4}{10}y[k-1] - \frac{1}{20}y[k-2] = 0.$$

Početni su uvjeti: $y[-1] = 0, y[-2] = -1$. Odredite rješenje homogene linearne diferencijske jednadžbe (homogeni odziv sustava).

Zadatak 11.1.2 Sustav je opisan homogenom diferencijskom jednadžbom (nepobuđen sustav):

$$y[k+2] - \frac{2}{3}y[k+1] + \frac{1}{9}y[k] = 0.$$

Početni su uvjeti: $y[-1] = -3, y[-2] = 1$. Odredite rješenje homogene linearne diferencijske jednadžbe (homogeni odziv sustava).

Zadatak 11.1.3 Sustav je opisan homogenom diferencijskom jednadžbom (nepobuđen sustav):

$$y[k] - y[k-1] + y[k-2] = 0.$$

Početni su uvjeti: $y[-1] = -1, y[-2] = -3$. Odredite rješenje homogene linearne diferencijske jednadžbe (homogeni odziv sustava).

Zadatak 11.1.4 Odredite odziv sustava $y[k]$ u prvih pet koraka ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) iz svih prethodnih zadataka. Provjerite točnost rješenja pomoću rješenja dobivenih u prethodnim zadacima.

Zadatak 11.1.5 Odredite izraz kojim će se računati Fibonaccijevi brojevi. Jednadžba diferencije Fibonaccijevog niza je:

$$y[k] = y[k-1] + y[k-2].$$

(svaki sljedeći broj dobije se kao zbroj prethodna dva). Početni su uvjeti: $y[0] = 0, y[1] = 1$.

11.2 Nehomogene linearne diferencijske jednadžbe

Opća linearna diferencijska jednadžba ima sljedeći oblik:

$$a_0y[k] + ... + a_{n-1}y[k-n+1] + a_ny[k-n] = b_0u[k] + ... + b_{m-1}u[k-m+1] + b_mu[k-m] \tag{11.12}$$

gdje su:

- $a_n, a_{n-1}, ..., a_0, b_m, ..., b_o$ konstantni parametri linearne diferencijske jednadžbe,
- n red linearne diferencijske jednadžbe, $n \geq m$.

Desnu stranu izraza (11.12) označimo s $f[k]$:

$$f[k] = b_0u[k] + ... + b_{m-1}u[k-m+1] + b_mu[k-m]. \tag{11.13}$$

Totalni odziv sustava opisanog linearnom diferencijskom jednadžbom zbroj je homogenog $y_h[k]$ i partikularnog $y_p[k]$ rješenja:

$$y[k] = y_h[k] + y_p[k]. \tag{11.14}$$

Linearna diferencijska jednadžba za koju vrijedi $f[k] \neq 0$ naziva se nehomogena diferencijska jednadžba (11.15):

$$a_0y[k] + a_1y[k-1] + ... + a_{n-1}y[k-n+1] + a_ny[k-n] = f[k]. \tag{11.15}$$

Partikularna rješenja sustava ovise o funkciji $f[k]$.

- Za funkciju $f[k]$ oblika:

  $$f\,[k] = B_0 + B_1k + ... + B_ik^i$$

  pretpostavljamo partikularno rješenje:

  $$y_p\,[k] = K_0 + K_1k + ... + K_ik^i.$$

- Za funkciju $f[k]$ oblika:

  $$f(k) = B$$

  pretpostavljamo partikularno rješenje:

  $$y_p(k) = K.$$

- Za funkciju $f[k]$ oblika:

$$f\left[k\right]=Ba^k, a\neq q_1, q_2, ..., q_n$$

pretpostavljamo partikularno rješenje:

$$y_p\left[k\right]=Ka^k.$$

- Za funkciju $f[k]$ oblika:

$$f\left[k\right]=Ba^k, a=q_1=q_2=...=q_i, a\neq q_{i+1}, q_{i+2}..., q_n$$

pretpostavljamo partikularno rješenje:

$$y_p\left[k\right]=Kk^ia^k.$$

- Za funkciju $f[k]$ oblika:

$$f\left[k\right]=Bk^i$$

pretpostavljamo partikularno rješenje:

$$y_p\left[k\right]=K_0+K_1k+...+K_ik^i.$$

- Za funkciju $f[k]$ oblika:

$$f\left[k\right]=Bk^ia^k, a\neq q_1, q_2..., q_n$$

pretpostavljamo partikularno rješenje:

$$y_p\left[k\right]=a^k\left(K_0+K_1k+...+K_ik^i\right).$$

- Za funkciju $f[k]$ oblika:

$$f\left[k\right]=B\sin\left(\omega k\right)$$

pretpostavljamo partikularno rješenje:

$$y_p\left[k\right]=K_1\sin\left(\omega k\right)+K_2\cos\left(\omega k\right).$$

- Za funkciju $f[k]$ oblika:

$$f\left[k\right]=B\cos\left(\omega k\right)$$

pretpostavljamo partikularno rješenje:

$$y_p\left[k\right]=K_1\sin\left(\omega k\right)+K_2\cos\left(\omega k\right).$$

Nakon što odredimo partikularno rješenje $y_p[k]$, riješimo homogenu linearnu diferencijsku jednadžbu tako da postavimo $f[k] = 0$. Kada odredimo homogeno rješenje, zapišemo ga u općem obliku:

$$y_h(k) = C_1 q_1^k + C_2 q_2^k + ... + C_n q_n^k. \tag{11.16}$$

Totalni odziv je tada:

$$y(k) = y_h(k) + y_p(k) = C_1 q_1^k + C_2 q_2^k + ... + C_n q_n^k + y_p(k). \tag{11.17}$$

Pobuda $f[k]$ uvijek će nastupiti za $k \geq 0$ pa je gore navedena jednadžba za totalni odziv ispravna samo uz uvjet $k \geq 0$. Iz ovog razloga potrebno je na temelju jednadžbe diferencije, početnih uvjeta $y[-1], y[-2], y[-3], ..., y[-n]$ i pobude, izračunati nove početne uvjete:

$$\begin{aligned}
&y[0] = \frac{1}{a_0} f\,[0] - \frac{a_1}{a_0} y[-1] - ... - \frac{a_{n-1}}{a_0} y[-n+1] - \frac{a_n}{a_0} y[-n] \\
&y[1] = \frac{1}{a_0} f\,[1] - \frac{a_1}{a_0} y[0] - ... - \frac{a_{n-1}}{a_0} y[-n+2] - \frac{a_n}{a_0} y[-n+1] \\
&. \\
&. \\
&. \\
&y[n-1] = \frac{1}{a_0} f\,[n-1] - \frac{a_1}{a_0} y[n-2] - ... - \frac{a_{n-1}}{a_0} y[0] - \frac{a_n}{a_0} y[-1].
\end{aligned} \tag{11.18}$$

Nakon toga, početne uvjete iskoristimo za računanje nepoznatih koeficijenata $C_1, C_2, ..., C_n$:

$$\begin{aligned}
&y\,[0] = y_h\,[0] + y_h\,[0] \\
&y\,[1] = y_h\,[1] + y_h\,[1] \\
&. \\
&. \\
&. \\
&y\,[n-1] = y_h\,[n-1] + y_h\,[n-1]\,.
\end{aligned} \tag{11.19}$$

Kao i kod homogenih diferencijskih jednadžbi i nehomogene se mogu riješiti koračnom metodom. Ova se metoda zasniva na računanju sljedećeg stanja $y[k]$ na temelju prethodnih korištenjem jednadžbe diferencije (11.15):

$$\begin{aligned}
&a_0 y[k] + a_1 y[k-1] + ... + a_{n-1} y[k-n+1] + a_n y[k-n] = f\,[k] \\
&a_0 y[k] = f\,[k] - a_1 y[k-1] - ... - a_{n-1} y[k-n+1] - a_n y[k-n] / : a_0 \\
&y[k] = \frac{1}{a_0} f\,[k] - \frac{a_1}{a_0} y[k-1] - ... - \frac{a_{n-1}}{a_0} y[k-n+1] - \frac{a_n}{a_0} y[k-n].
\end{aligned} \tag{11.20}$$

U izraz (11.20) redom uvrstimo $k = 0, 1, 2, ..., j$ te dobijemo:

$$\begin{aligned}
y[0] &= \frac{1}{a_0} f\,[0] - \frac{a_1}{a_0} y[-1] - ... - \frac{a_{n-1}}{a_0} y[-n+1] - \frac{a_n}{a_0} y[-n] \\
y[1] &= \frac{1}{a_0} f\,[1] - \frac{a_1}{a_0} y[0] - ... - \frac{a_{n-1}}{a_0} y[-n+2] - \frac{a_n}{a_0} y[-n+1] \\
&. \\
&. \\
&. \\
y[j] &= \frac{1}{a_0} f\,[j] - \frac{a_1}{a_0} y[j-1] - ... - \frac{a_{n-1}}{a_0} y[j-n+1] - \frac{a_n}{a_0} y[j-n].
\end{aligned} \tag{11.21}$$

Primjer 11.2.1 Sustav je opisan nehomogenom diferencijskom jednadžbom:

$$y\,[k] - \frac{3}{5} y\,[k-1] + \frac{1}{20} y\,[k-2] = f\,[k]$$

$$f\,[k] = \begin{cases} 5 & k \geqslant 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}.$$

Početni su uvjeti: $y[-1]$ =0, $y[-2] = 0$. Odredite rješenje nehomogene linearne diferencijske jednadžbe (totalni odziv sustava).

Rješenje Totalni odziv sustava jednak je zbroju homogenog rješenja sustava i partikularnog rješenja:

$$y[k] = y_h[k] + y_p[k].$$

Najprije riješimo opću homogenu jednadžbu ($f[k] = 0$), a zatim pronađemo partikularno rješenje te na temelju totalnog odziva i početnih uvjeta odredimo koeficijente C_1, C_2, ..., C_n. Pretpostavljamo homogeno rješenje $y_h[k] = Cq^k$. Pretpostavljeno rješenje uvrstimo u homogenu diferencijsku jednadžbu te dobijemo karakterističnu jednadžbu:

$$\begin{aligned}
&y\,[k] - \frac{3}{5} y\,[k-1] + \frac{1}{20} y\,[k-2] = 0 \\
&y_h\,[k] = Cq^k, y_h\,[k-1] = Cq^{k-1}, y_h\,[k-2] = Cq^{k-2} \\
&Cq^k - \frac{3}{5} Cq^{k-1} + \frac{1}{20} Cq^{k-2} = 0 / \cdot q^2 \\
&Cq^k \left(q^2 - \frac{3}{5} q + \frac{1}{20} \right) = 0 \\
&q^2 - \frac{3}{5} q + \frac{1}{20} = 0.
\end{aligned}$$

Rješenjem karakteristične jednadžbe možemo izračunati korijene karakteristične jednadžbe te dobiti opće rješenje homogene diferencijske jednadžbe:

$$
\begin{aligned}
&q^2-\frac{3}{5}q+\frac{1}{20}=0\\
&q_{1,2}=\frac{\frac{3}{5}\pm\sqrt{\frac{9}{25}-\frac{4}{20}}}{2}=\frac{\frac{3}{5}\pm\sqrt{\frac{36}{100}-\frac{20}{100}}}{2}=\frac{3}{10}\pm\frac{1}{5}\\
&q_1=\frac{1}{10},q_2=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Korijeni karakteristične jednadžbe su realni i različiti pa prema tome pretpostavljamo sljedeće homogeno rješenje:

$$
\begin{aligned}
&y_h[k]=C_1{q_1}^k+C_2{q_2}^k\\
&y_h[k]=C_1\left(\frac{1}{10}\right)^k+C_2\left(\frac{1}{2}\right)^k,k\geq 0.
\end{aligned}
$$

Sada je potrebno odrediti partikularno rješenje. Pobuda $f[k]$ je konstanta te prema tome pretpostavljamo sljedeće partikularno rješenje:

$$y_p\left[k\right]=K.$$

Njega uvrstimo u zadanu diferencijsku jednadžbu:

$$
\begin{aligned}
&y_p\left[k\right]-\frac{3}{5}y_p\left[k-1\right]+\frac{1}{20}y_p\left[k-2\right]=5\\
&y_p\left[k\right]=K\\
&y_p\left[k-1\right]=K\\
&y_p\left[k-2\right]=K\\
&K-\frac{3}{5}K+\frac{1}{20}K=5\\
&\frac{9}{20}K=5\Rightarrow K=\frac{100}{9}
\end{aligned}
$$

te dobijemo partikularno rješenje:

$$y_p\left[k\right]=\frac{100}{9}.$$

Totalni odziv sustava je:

$$y\left[k\right]=C_1\left(\frac{1}{10}\right)^k+C_2\left(\frac{1}{2}\right)^k+\frac{100}{9}.$$

Sada je potrebno izračunati nove početne uvjete jer pobuda nastupa tek za $k\geq 0$. Početne uvjete izračunat ćemo iz diferencijske jednadžbe:

$$
\begin{aligned}
&y\left[0\right]=\frac{3}{5}y\left[-1\right]-\frac{1}{20}y\left[-2\right]+5=5\\
&y\left[1\right]=\frac{3}{5}y\left[0\right]-\frac{1}{20}y\left[-1\right]+5=\frac{3}{5}5+5=8.
\end{aligned}
$$

U totalni odziv uvrstimo $k=0$ i $k=1$ te izračunamo koeficijente C_1, C_2:

$$y[0] = C_1\left(\frac{1}{10}\right)^0 + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \frac{100}{9} = C_1 + C_2 + \frac{100}{9} = 5$$

$$y[1] = C_1\left(\frac{1}{10}\right)^1 + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \frac{100}{9} = \frac{C_1}{10} + \frac{C_2}{2} + \frac{100}{9} = 8/\cdot(-10)$$

$$C_1 + C_2 = 5 - \frac{100}{9} = -\frac{55}{9}$$

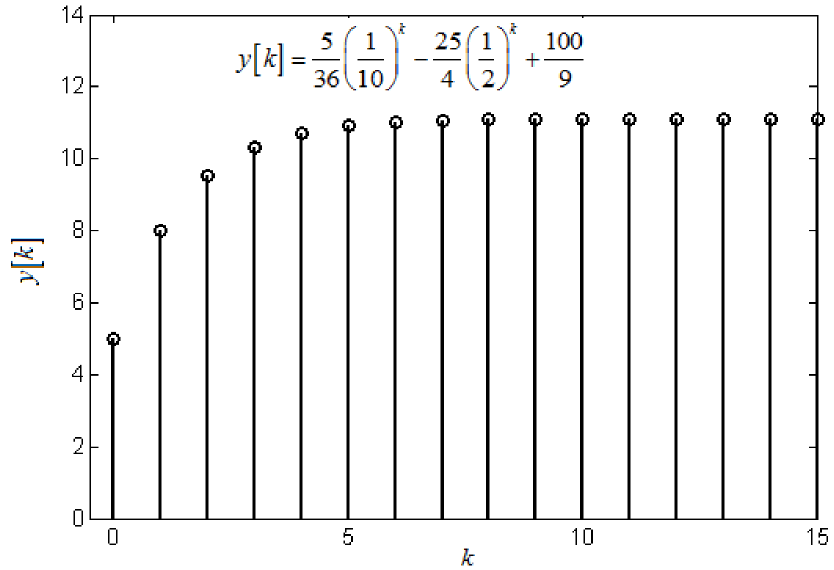
$$-C_1 - 5C_2 = -80 + \frac{1000}{9} = \frac{280}{9}$$

$$-4C_2 = \frac{225}{9} \Rightarrow C_2 = -\frac{25}{4}$$

$$C_1 = -C_2 - \frac{55}{9} = \frac{5}{36}.$$

Totalni odziv sustava je (slika 11.4):

$$y[k] = \frac{5}{36}\left(\frac{1}{10}\right)^k - \frac{25}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{100}{9}, k \geq 0.$$



Slika 11.4: Rješenje nehomogene diferencijske jednadžbe $y[k] - \frac{3}{5}y[k-1] + \frac{1}{20}y[k-2] = 5, k \geq 0$, početni uvjeti: $y[-1] = 0$, $y[-2] = 0$.

Primjer 11.2.2 Sustav je opisan nehomogenom diferencijskom jednadžbom:

$$y[k] - y[k-1] + y[k-2] = f[k]$$

$$f[k] = \begin{cases} 1 + 2k + 3k^2 & k \geqslant 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}.$$

Početni su uvjeti: $y[-1] = 0$, $y[-2] = 0$. Odredite rješenje nehomogene linearne diferencijske jednadžbe (totalni odziv sustava).

Rješenje Totalni odziv sustava jednak je zbroju homogenog rješenja sustava i partikularnog rješenja:

$$y[k] = y_h[k] + y_p[k].$$

Najprije riješimo opću homogenu jednadžbu ($f[k] = 0$), a zatim pronađemo partikularno rješenje te na temelju totalnog odziva i početnih uvjeta odredimo koeficijente C_1, C_2, ..., C_n. Pretpostavljamo homogeno rješenje $y_h[k] = Cq^k$. Pretpostavljeno rješenje uvrstimo u homogenu diferencijsku jednadžbu te dobijemo karakterističnu jednadžbu:

$$\begin{aligned}
&y\left[k\right] - y\left[k-1\right] + y\left[k-2\right] = 0\\
&y_h\left[k\right] = Cq^k, y_h\left[k-1\right] = Cq^{k-1}, y_h\left[k-2\right] = Cq^{k-2}\\
&Cq^k - Cq^{k-1} + Cq^{k-2} = 0 / \cdot q^2\\
&Cq^k\left(q^2 - q + 1\right) = 0\\
&q^2 - q + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Rješenjem karakteristične jednadžbe možemo izračunati korijene karakteristične jednadžbe te dobiti opće rješenje homogene diferencijske jednadžbe:

$$\begin{aligned}
&q^2 - q + 1 = 0\\
&q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&q_1 = \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, q_2 = \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Korijeni karakteristične jednadžbe su konjugirano kompleksni pa prema tome pretpostavljamo sljedeće homogeno rješenje:

$$y_h[k] = r^k\left(C_1 \sin\left(\omega k\right) + C_2 \cos\left(\omega k\right)\right).$$

Izračunajmo sada r i ω:

$$\begin{aligned}
&r = \sqrt{\mathrm{Re}\left\{q_1\right\}^2 + \mathrm{Im}\left\{q_1\right\}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1\\
&\omega = \arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Homogeno rješenje zadanog sustava je:

$$y_h\left[k\right] = \left(C_1 \sin\left(\frac{\pi}{3}k\right) + C_2 \cos\left(\frac{\pi}{3}k\right)\right).$$

Sada je potrebno odrediti partikularno rješenje. Pobuda $f[k]$ je polinom te prema tome pretpostavljamo sljedeće partikularno rješenje:

$$y\left[k\right] = K_0 + K_1 k + K_2 k^2.$$

Njega uvrstimo u zadanu diferencijsku jednadžbu:

$$
\begin{aligned}
&y_p[k] - y_p[k-1] + y_p[k-2] = 1 + 2k + 3k^2 \\
&y_p[k] = K_0 + K_1 k + K_2 k^2 \\
&y_p[k-1] = K_0 + K_1(k-1) + K_2(k-1)^2 \\
&y_p[k-1] = K_0 - K_1 + K_2 + K_1 k - 2K_2 k + K_2 k^2 \\
&y_p[k-2] = K_0 + K_1(k-2) + K_2(k-2)^2 \\
&y_p[k-2] = K_0 - 2K_1 + 4K_2 + K_1 k - 4K_2 k + K_2 k^2 \\
&K_0 + K_1 k + K_2 k^2 - \left(K_0 - K_1 + K_2 + K_1 k - 2K_2 k + K_2 k^2\right) + \\
&+K_0 - 2K_1 + 4K_2 + K_1 k - 4K_2 k + K_2 k^2 = 1 + 2k + 3k^2 \\
&K_0 - K_1 + 3K_2 = 1 \Rightarrow K_0 = 1 + K_1 - 3K_2 = 0 \\
&K_1 - 2K_2 = 2 \Rightarrow K_1 = 2 + 2K_2 = 8 \\
&K_2 = 3
\end{aligned}
$$

te dobijemo partikularno rješenje:

$$y_p[k] = 8k + 3k^2.$$

Totalni odziv sustava je:

$$y[k] = \left(C_1 \sin\left(\frac{\pi}{3}k\right) + C_2 \cos\left(\frac{\pi}{3}k\right)\right) + 8k + 3k^2, k \geq 0$$

Sada je potrebno izračunati nove početne uvjete jer pobuda nastupa tek za $k \geq 0$. Početne uvjete izračunat ćemo iz diferencijske jednadžbe:

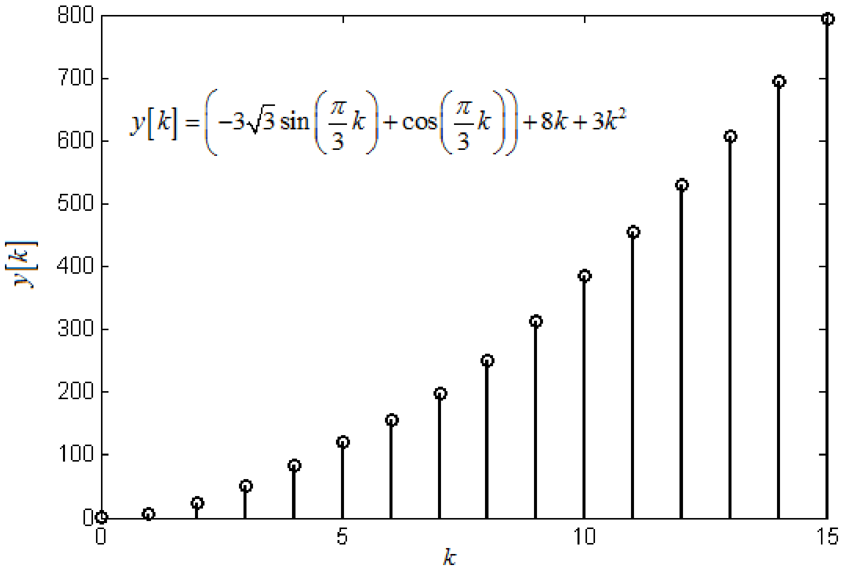
$$
\begin{aligned}
&y[k] = y[k-1] - y[k-2] + 1 + 2k + 3k^2 \\
&y[0] = y[-1] - y[-2] + 1 = 1 \\
&y[1] = y[0] - y[-1] + 1 + 2 + 3 = 7.
\end{aligned}
$$

U totalni odziv uvrstimo $k = 0$ i $k = 1$ te izračunamo koeficijente C_1, C_2:

$$
\begin{aligned}
&y[0] = \left(C_1 \sin\left(\frac{\pi}{3}0\right) + C_2 \cos\left(\frac{\pi}{3}0\right)\right) = C_2 = 1 \\
&y[1] = \left(C_1 \sin\left(\frac{\pi}{3}1\right) + C_2 \cos\left(\frac{\pi}{3}1\right)\right) + 11 = \frac{\sqrt{3}}{2}C_1 + \frac{1}{2} + 11 = 7 \\
&\sqrt{3}C_1 = -9 \Rightarrow C_1 = -\frac{9}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -3\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

Totalni odziv sustava je (slika 11.5):

$$y[k] = \left(-3\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}k\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}k\right)\right) + 8k + 3k^2, k \geq 0.$$



Slika 11.5: Rješenje nehomogene diferencijske jednadžbe $y[k] - y[k-1] + y[k-2] = 1 + 2k + 3k^2, k \geq 0$, početni uvjeti: $y[-1] = 0$, $y[-2] = 0$.

Primjer 11.2.3 Sustav je opisan nehomogenom diferencijskom jednadžbom:

$$y[k] - \frac{2}{15}y[k-1] - \frac{1}{15}y[k-2] = f[k]$$

$$f[k] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^k & k \geqslant 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}.$$

Početni uvjeti su: $y[-1] = -1$, $y[-2] = 1$. Odredite rješenje nehomogene linearne diferencijske jednadžbe (totalni odziv sustava).

Rješenje Totalni odziv sustava jednak je zbroju homogenog rješenja sustava i partikularnog rješenja:

$$y[k] = y_h[k] + y_p[k].$$

Najprije riješimo opću homogenu jednadžbu ($f[k] = 0$), a zatim pronađemo partikularno rješenje te na temelju totalnog odziva i početnih uvjeta odredimo koeficijente C_1, C_2, ..., C_n. Pretpostavljamo homogeno rješenje $y_h[k] = Cq^k$. Pretpostavljeno rješenje uvrstimo u homogenu diferencijsku jednadžbu te dobijemo karakterističnu jednadžbu:

$$y[k] - \frac{2}{15}y[k-1] - \frac{1}{15}y[k-2] = 0$$
$$y_h[k] = Cq^k, y_h[k-1] = Cq^{k-1}, y_h[k-2] = Cq^{k-2}$$
$$Cq^k - \frac{2}{15}Cq^{k-1} - \frac{1}{15}Cq^{k-2} = 0 / \cdot q^2$$
$$Cq^k\left(q^2 - \frac{2}{15}q - \frac{1}{15}\right) = 0$$
$$q^2 - \frac{2}{15}q - \frac{1}{15} = 0.$$

Rješenjem karakteristične jednadžbe možemo izračunati korijene karakteristične jednadžbe te dobiti opće rješenje homogene diferencijske jednadžbe:

$$q^2 - \frac{2}{15}q - \frac{1}{15} = 0$$
$$q_{1,2} = \frac{\frac{2}{15} \pm \sqrt{\frac{4}{225} + \frac{4}{15}}}{2} = \frac{\frac{2}{15} \pm \sqrt{\frac{4}{225} + \frac{60}{225}}}{2} = \frac{2}{30} \pm \frac{8}{30}$$
$$q_1 = \frac{1}{3}, q_2 = -\frac{1}{5}.$$

Korijeni karakteristične jednadžbe su realni i različiti pa prema tome pretpostavljamo sljedeće homogeno rješenje:

$$y_h[k] = C_1{q_1}^k + C_2{q_2}^k$$
$$y_h[k] = C_1\left(\frac{1}{3}\right)^k + C_2\left(-\frac{1}{5}\right)^k.$$

Sada je potrebno odrediti partikularno rješenje. Pobuda $f[k]$ je eksponencijalna (karakteristična vrijednost eksponencijale nije jednaka ni jednom korijenu karakteristične jednadžbe) pa se prema tome pretpostavljamo sljedeće partikularno rješenje:

$$y_p[k] = K\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Njega uvrstimo u zadanu diferencijsku jednadžbu:

$$y[k] - \frac{2}{15}y[k-1] - \frac{1}{15}y[k-2] = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$
$$y_p[k] = K\left(\frac{1}{2}\right)^k$$
$$y_p[k-1] = K\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 2K\left(\frac{1}{2}\right)^k$$
$$y_p[k-2] = K\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = 4K\left(\frac{1}{2}\right)^k$$
$$K\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{4}{15}K\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{4}{15}K\left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$
$$K - \frac{4}{15}K - \frac{4}{15}K = 1 \Rightarrow K = \frac{15}{7}$$

te dobijemo partikularno rješenje:

$$y_p[k] = \frac{15}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Totalni odziv sustava je:

$$y[k] = C_1\left(\frac{1}{3}\right)^k + C_2\left(-\frac{1}{5}\right)^k + \frac{15}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^k, k \geq 0$$

Sada je potrebno izračunati nove početne uvjete jer pobuda nastupa tek za $k \geq 0$. Početne uvjete izračunat ćemo iz diferencijske jednadžbe:

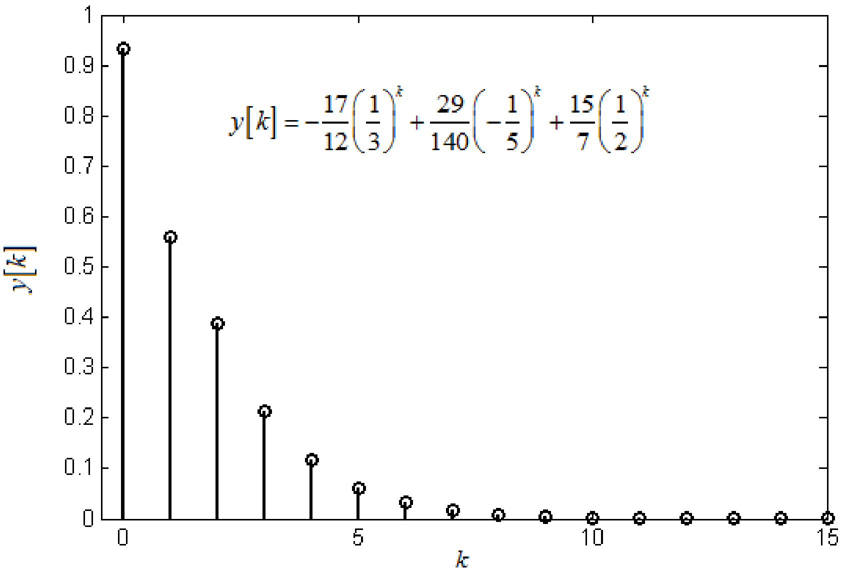
$$
\begin{aligned}
y[k] &= \frac{2}{15} y[k-1] \, \frac{1}{15} y[k-2] + \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
y[0] &= \frac{2}{15} y[-1] + \frac{1}{15} y[-2] + \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{2}{15}(-1) + \frac{1}{15} 1 + 1 = \frac{14}{15} \\
y[1] &= \frac{2}{15} y[0] + \frac{1}{15} y[-1] + \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{2}{15}\frac{14}{15} + \frac{1}{15}(-1) + \frac{1}{2} = \frac{251}{450}
\end{aligned}
$$

U totalni odziv uvrstimo $k = 0$ i $k = 1$ te izračunamo koeficijente C_1, C_2:

$$
\begin{array}{l}
y[0] = C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^0 + C_2 \left(-\frac{1}{5}\right)^0 + \frac{15}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{14}{15} \\
y[1] = C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 + C_2 \left(-\frac{1}{5}\right)^1 + \frac{15}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{251}{450} \\
C_1 + C_2 = \frac{14}{15} - \frac{15}{7} = -\frac{127}{105} \\
\frac{C_1}{3} - \frac{C_2}{5} = \frac{251}{450} - \frac{15}{14} = -\frac{809}{1575} / \cdot 5 \\
\hline
C_1 + C_2 = -\frac{127}{105} \\
\frac{5}{3} C_1 - C_2 = -\frac{809}{315} \\
\hline
\frac{8}{3} C_1 = -\frac{34}{9} \Rightarrow C_1 = -\frac{17}{12} \\
C_2 = -\frac{127}{105} - C_1 = \frac{29}{140}.
\end{array}
$$

Totalni odziv sustava je (slika 11.6):

$$
y[k] = -\frac{17}{12}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{29}{140}\left(-\frac{1}{5}\right)^k + \frac{15}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^k, k \geq 0.
$$



Slika 11.6: Rješenje nehomogene diferencijske jednadžbe $y\,[k] - \frac{2}{15}y\,[k-1] - \frac{1}{15}y\,[k-2] = \left(\frac{1}{2}\right)^k, k \geq 0$, početni uvjeti: $y[-1] = -1$, $y[-2] = 1$.

Primjer 11.2.4 Sustav je opisan nehomogenom diferencijskom jednadžbom:

$$y\,[k] - \frac{1}{3}y\,[k-1] = f\,[k]$$

$$f\,[k] = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^k & k \geqslant 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}.$$

Početni je uvjet: $y[-1] = -1$. Odredite rješenje nehomogene linearne diferencijske jednadžbe (totalni odziv sustava).

Rješenje Totalni odziv sustava jednak je zbroju homogenog rješenja sustava i partikularnog rješenja:

$$y[k] = y_h[k] + y_p[k].$$

Najprije riješimo opću homogenu jednadžbu ($f[k] = 0$), a zatim pronađemo partikularno rješenje te na temelju totalnog odziva i početnih uvjeta odredimo koeficijente C_1, C_2, ..., C_n. Pretpostavljamo homogeno rješenje $y_h[k] = Cq^k$. Pretpostavljeno rješenje uvrstimo u homogenu diferencijsku jednadžbu te dobijemo karakterističnu jednadžbu:

$$y\,[k] - \frac{1}{3}y\,[k-1] = 0$$

$$y_h\,[k] = Cq^k, y_h\,[k-1] = Cq^{k-1}$$

$$Cq^k - \frac{1}{3}Cq^{k-1} = 0/\cdot q$$

$$Cq^k\left(q - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$q - \frac{1}{3} = 0.$$

Rješenjem karakteristične jednadžbe možemo izračunati korijen karakteristične jednadžbe i dobiti opće rješenje homogene diferencijske jednadžbe:

$$q - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow q_1 = \frac{1}{3}.$$

Korijen karakteristične jednadžbe realan je pa se prema tome pretpostavlja sljedeće homogeno rješenje:

$$\begin{aligned} y_h\left[k\right] &= C_1 {q_1}^k \\ y_h\left[k\right] &= C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^k. \end{aligned}$$

Sada je potrebno odrediti partikularno rješenje. Pobuda $f[k]$ je eksponencijalna (karakteristična vrijednost eksponencijale jednaka je korijenu karakteristične jednadžbe) pa se prema tome pretpostavlja sljedeće partikularno rješenje:

$$y_p\left[k\right] = Kk\left(\frac{1}{3}\right)^k.$$

Njega uvrstimo u zadanu diferencijsku jednadžbu:

$$\begin{aligned} & y\left[k\right] - \frac{1}{3} y\left[k-1\right] = \left(\frac{1}{3}\right)^k \\ & y_p\left[k\right] = Kk\left(\frac{1}{3}\right)^k \\ & y_p\left[k-1\right] = K\left(k-1\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = 3K\left(k-1\right)\left(\frac{1}{3}\right)^k \\ & Kk\left(\frac{1}{3}\right)^k - \frac{1}{3} 3K\left(k-1\right)\left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(\frac{1}{3}\right)^k \\ & Kk - Kk + K = 1 \\ & K = 1 \end{aligned}$$

te dobijemo partikularno rješenje:

$$y_p\left[k\right] = k\left(\frac{1}{3}\right)^k.$$

Totalni odziv sustava je:

$$y\left[k\right] = C_1\left(\frac{1}{3}\right)^k + k\left(\frac{1}{3}\right)^k, k \geq 0.$$

Sada je potrebno izračunati novi početni uvjet jer pobuda nastupa tek za $k \geq 0$. Početni uvjet izračunat ćemo iz diferencijske jednadžbe:

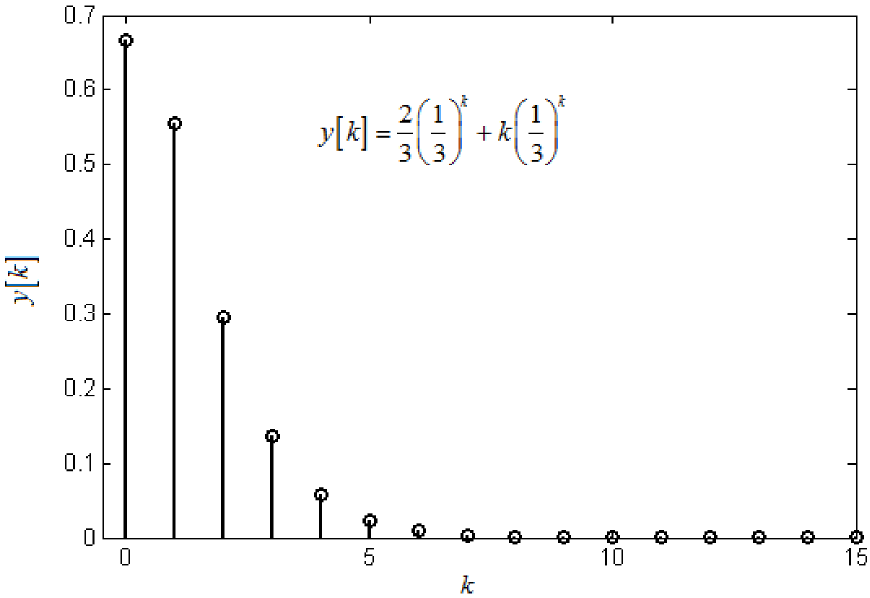
$$\begin{aligned} y\left[k\right] &= \frac{1}{3} y\left[k-1\right] + \left(\frac{1}{3}\right)^k \\ y\left[0\right] &= \frac{1}{3} y\left[-1\right] + \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{1}{3}\left(-1\right) + 1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

U totalni odziv uvrstimo $k = 0$ te izračunamo koeficijent C_1:

$$y[0] = C_1\left(\frac{1}{3}\right)^0 + 0\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{2}{3}$$
$$C_1 = \frac{2}{3}.$$

Totalni odziv sustava je (slika 11.7):

$$y[k] = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k + k\left(\frac{1}{3}\right)^k, k \geq 0.$$



Slika 11.7: Rješenje nehomogene diferencijske jednadžbe $y[k] - \frac{1}{3}y[k-1] = \left(\frac{1}{3}\right)^k, k \geq 0$, početni uvjet: $y[-1] = -1$.

Primjer 11.2.5 Sustav je opisan nehomogenom diferencijskom jednadžbom:

$$y[k] - \frac{1}{2}y[k-1] = f[k]$$

$$f[k] = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) & k \geqslant 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}.$$

Početni uvjet je: $y[-1] = 2$. Odredite rješenje nehomogene linearne diferencijske jednadžbe (totalni odziv sustava).

Rješenje Totalni odziv sustava jednak je zbroju homogenog rješenja sustava i partikularnog rješenja:

$$y[k] = y_h[k] + y_p[k].$$

Najprije riješimo opću homogenu jednadžbu ($f[k] = 0$), a zatim pronađemo partikularno rješenje te na temelju totalnog odziva i početnih uvjeta odredimo koeficijente C_1, C_2, ..., C_n. Pretpostavljamo homogeno rješenje $y_h[k] = Cq^k$. Pretpostavljeno rješenje uvrstimo u homogenu diferencijsku jednadžbu te dobijemo karakterističnu jednadžbu:

$$
\begin{aligned}
& y\left[k\right] - \frac{1}{2} y\left[k-1\right] = 0 \\
& y_h\left[k\right] = Cq^k, y_h\left[k-1\right] = Cq^{k-1} \\
& Cq^k - \frac{1}{2} Cq^{k-1} = 0 / \cdot q \\
& Cq^k \left(q - \frac{1}{2}\right) = 0 \\
& q - \frac{1}{2} = 0.
\end{aligned}
$$

Rješenjem karakteristične jednadžbe možemo izračunati korijen karakteristične jednadžbe te dobiti opće rješenje homogene diferencijske jednadžbe:

$$
q - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow q_1 = \frac{1}{2}.
$$

Korijen karakteristične jednadžbe realan je pa se prema tome pretpostavlja sljedeće homogeno rješenje:

$$
\begin{aligned}
y_h\left[k\right] &= C_1 {q_1}^k \\
y_h\left[k\right] &= C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^k
\end{aligned}
$$

Sada je potrebno odrediti partikularno rješenje. Pobuda $f[k]$ je sinusna pa se prema tome pretpostavlja sljedeće partikularno rješenje:

$$
y_p\left[k\right] = K_1 \sin\left(\frac{\pi}{4} k\right) + K_2 \cos\left(\frac{\pi}{4} k\right).
$$

Njega uvrstimo u zadanu diferencijsku jednadžbu:

$$
\begin{aligned}
& y\left[k\right] - \frac{1}{2} y\left[k-1\right] = \sin\left(\frac{\pi}{4} k\right) \\
& y_p\left[k\right] = K_1 \sin\left(\frac{\pi}{4} k\right) + K_2 \cos\left(\frac{\pi}{4} k\right) \\
& y_p\left[k-1\right] = K_1 \sin\left(\frac{\pi}{4}\left(k-1\right)\right) + K_2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\left(k-1\right)\right) \\
& y_p\left[k-1\right] = K_1 \sin\left(\frac{\pi}{4} k - \frac{\pi}{4}\right) + K_2 \cos\left(\frac{\pi}{4} k - \frac{\pi}{4}\right) \\
& y_p\left[k-1\right] = K_1 \left(\sin\left(\frac{\pi}{4} k\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} k\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + ... \\
& + K_2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} k\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} k\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
& y_p\left[k-1\right] = \left(K_1 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + K_2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} k\right) + ... \\
& + \left(-K_1 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + K_2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} k\right) \\
& y_p\left[k-1\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(K_1 + K_2\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} k\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(K_2 - K_1\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} k\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&y[k]-\frac{1}{2}y[k-1]=\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)\\
&K_1\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)+K_2\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}(K_1+K_2)\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)-\\
&-\frac{\sqrt{2}}{4}(K_2-K_1)\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)\\
&K_1-\frac{\sqrt{2}}{4}(K_1+K_2)=1/\cdot 4\Rightarrow K_1(4-\sqrt{2})-\sqrt{2}K_2=4/\cdot\left(-\sqrt{2}\right)\\
&K_2-\frac{\sqrt{2}}{4}(K_2-K_1)=0/\cdot 4\Rightarrow \sqrt{2}K_1+K_2(4-\sqrt{2})=0/\cdot\left(4-\sqrt{2}\right)\\
&-\sqrt{2}(4-\sqrt{2})K_1+2K_2=-4\sqrt{2}\\
&\underline{\sqrt{2}\left(4-\sqrt{2}\right)K_1+K_2\left(4-\sqrt{2}\right)^2=0}\\
&2K_2+K_2\left(16-8\sqrt{2}+2\right)=-4\sqrt{2}\Rightarrow K_2=\frac{-4\sqrt{2}}{20-8\sqrt{2}}\frac{20+8\sqrt{2}}{20+8\sqrt{2}}=-\frac{4+5\sqrt{2}}{17}\\
&\sqrt{2}K_1=\frac{\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}}(4-\sqrt{2})\Rightarrow K_1=\frac{4-\sqrt{2}}{5-2\sqrt{2}}\frac{5+2\sqrt{2}}{5+2\sqrt{2}}=\frac{16+3\sqrt{2}}{17}
\end{aligned}
$$

te dobijemo partikularno rješenje:

$$
y_p[k]=\frac{16+3\sqrt{2}}{17}\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)-\frac{4+5\sqrt{2}}{17}\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right).
$$

Totalni odziv sustava je:

$$
y[k]=C_1\left(\frac{1}{2}\right)^k+\frac{16+3\sqrt{2}}{17}\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)-\frac{4+5\sqrt{2}}{17}\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right),k\geq 0.
$$

Sada je potrebno izračunati novi početni uvjet jer pobuda nastupa tek za $k\geq 0$. Početni uvjet izračunat ćemo iz diferencijske jednadžbe:

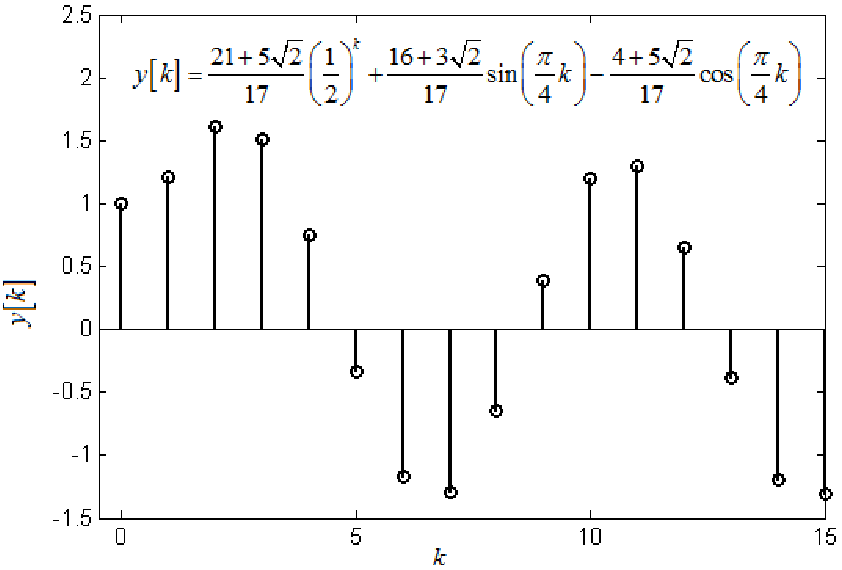
$$
\begin{aligned}
y[k]&=\frac{1}{2}y[k-1]+\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)\\
y[0]&=\frac{1}{2}y[-1]+\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 0\right)=\frac{1}{2}2+0=1.
\end{aligned}
$$

U totalni odziv uvrstimo $k=0$ te izračunamo koeficijent C_1:

$$
\begin{aligned}
&y[0]=C_1\left(\frac{1}{2}\right)^0+\frac{16+3\sqrt{2}}{17}\sin\left(\frac{\pi}{4}\cdot 0\right)-\frac{4+5\sqrt{2}}{17}\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot 0\right)=1\\
&C_1=1+\frac{4+5\sqrt{2}}{17}=\frac{21+5\sqrt{2}}{17}.
\end{aligned}
$$

Totalni odziv sustava je (slika 11.8):

$$
y[k]=\frac{21+5\sqrt{2}}{17}\left(\frac{1}{2}\right)^k+\frac{16+3\sqrt{2}}{17}\sin\left(\frac{\pi}{4}k\right)-\frac{4+5\sqrt{2}}{17}\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right),k\geq 0.
$$



Slika 11.8: Rješenje nehomogene diferencijske jednadžbe $y[k] - \frac{1}{2}y[k-1] = \sin\left(\frac{\pi}{4}k\right), k \geq 0$, početni uvjet: $y[-1] = 2$.

Primjer 11.2.6 Sustav je opisan homogenom diferencijskom jednadžbom (nepobuđen sustav):

$$y[k] - y[k-1] + y[k-2] = f[k]$$

$$f[k] = \begin{cases} 1 + 2k + 3k^2 & k \geqslant 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}.$$

Početni uvjeti su: $y[-1] = 0, y[-2] = 0$. Odredite odziv sustava $y[k]$ u prvih pet koraka ($k = 0, 1, 2, 3, 4$). Provjerite točnost rješenja pomoću rješenja dobivenog u primjeru 11.2.2.

Rješenje Zapišimo zadanu nehomogenu diferencijsku jednadžbu na sljedeći način:

$$\begin{aligned} y[k] &= y[k-1] - y[k-2] + f[k] \\ y[k] &= y[k-1] - y[k-2] + 1 + 2k + 3k^2. \end{aligned}$$

Sada ćemo redom uvrstiti $k = 0, 1, 2, 3, 4$ i koristiti prethodne rezultate te početne uvjete.

$$\begin{aligned} y[0] &= y[-1] - y[-2] + 1 = 0 + 0 + 1 = 1 \\ y[1] &= y[0] - y[-1] + 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (1)^2 = 1 - 0 + 1 + 2 + 3 = 7 \\ y[2] &= y[1] - y[0] + 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (2)^2 = 7 - 1 + 1 + 4 + 12 = 23 \\ y[3] &= y[2] - y[1] + 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (3)^2 = 23 - 7 + 1 + 6 + 27 = 50 \\ y[4] &= y[3] - y[2] + 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (4)^2 = 50 - 23 + 1 + 8 + 48 = 84 \end{aligned}$$

Uvrstimo sada $k = 0, 1, 2, 3, 4$ u rješenje primjera 11.2.2.

Dobivamo redom:

$$
\begin{aligned}
y[0] &= \left(-3\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot 0\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 0\right)\right)+8\cdot 0+3\cdot(0)^2 = 0+1+0+0=1\\
y[1] &= \left(-3\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot 1\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 1\right)\right)+8\cdot 1+3\cdot(1)^2 = -\frac{9}{2}+\frac{1}{2}+8+3=7\\
y[2] &= \left(-3\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot 2\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 2\right)\right)+8\cdot 2+3\cdot(2)^2 = -\frac{9}{2}-\frac{1}{2}+16+12=23\\
y[3] &= \left(-3\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot 3\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 3\right)\right)+8\cdot 3+3\cdot(3)^2 = 0-1+24+27=50\\
y[4] &= \left(-3\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot 4\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 4\right)\right)+8\cdot 4+3\cdot(4)^2 = \frac{9}{2}-\frac{1}{2}+32+48=84.
\end{aligned}
$$

Rezultat je isti, kao što je bilo i očekivano.

11.2.1 Zadaci za vježbu

Zadatak 11.2.1 Sustav je opisan nehomogenom diferencijskom jednadžbom:

$$y[k]-\frac{5}{12}y[k-1]+\frac{1}{24}y[k-2]=f[k]$$

$$f[k]=\begin{cases} 12 & k\geqslant 0\\ 0 & k<0\end{cases}.$$

Početni su uvjeti: $y[-1]=0$, $y[-2]=0$. Odredite rješenje nehomogene linearne diferencijske jednadžbe (totalni odziv sustava).

Zadatak 11.2.2 Sustav je opisan nehomogenom diferencijskom jednadžbom:

$$y[k]+y[k-1]+y[k-2]=f[k]$$

$$f[k]=\begin{cases} 1+2k+3k^2+4k^3 & k\geqslant 0\\ 0 & k<0\end{cases}.$$

Početni su uvjeti: $y[-1]=0$, $y[-2]=0$. Odredite rješenje nehomogene linearne diferencijske jednadžbe (totalni odziv sustava).

Zadatak 11.2.3 Sustav je opisan nehomogenom diferencijskom jednadžbom:

$$y[k]-\frac{2}{5}y[k-1]-\frac{1}{10}y[k-2]=f[k]$$

$$f[k]=\begin{cases} 4\left(\frac{1}{3}\right)^k & k\geqslant 0\\ 0 & k<0\end{cases}.$$

Početni su uvjeti: $y[-1]=-1$, $y[-2]=1$. Odredite rješenje nehomogene linearne diferencijske jednadžbe (totalni odziv sustava).

Zadatak 11.2.4 Sustav je opisan nehomogenom diferencijskom jednadžbom:

$$y[k]-\frac{1}{2}y[k-1]=f[k]$$

$$f[k]=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^k & k\geqslant 0\\ 0 & k<0\end{cases}.$$

Početni je uvjet: $y[-1]=0$. Odredite rješenje nehomogene linearne diferencijske jednadžbe (totalni odziv sustava).

Zadatak 11.2.5 Sustav je opisan nehomogenom diferencijskom jednadžbom:

$$y[k]-\frac{1}{3}y[k-1]=f[k]$$

$$f[k]=\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) & k\geqslant 0\\ 0 & k<0\end{cases}.$$

Početni je uvjet: $y[-1]=1$. Odredite rješenje nehomogene linearne diferencijske jednadžbe (totalni odziv sustava).

Zadatak 11.2.6 Sustav je opisan homogenom diferencijskom jednadžbom (nepobuđen sustav):

$$y[k]-\frac{1}{2}y[k-1]=f[k]$$

$$f[k]=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^k & k\geqslant 0\\ 0 & k<0\end{cases}.$$

Početni je uvjet: $y[-1]=0$. Odredite odziv sustava $y[k]$ u prvih pet koraka ($k=0,1,2,3,4$). Provjerite točnost rješenja pomoću rješenja dobivenog u zadatku 11.2.4.

Poglavlje 12

Z transformacija

12.1 Z transformacija i njezina svojstva

Vidjeli smo kod linearnih diferencijalnih jednadžbi da je Laplaceova transformacija vrlo korisna za rješavanje linearnih diferencijalnih jednadžbi. U prethodnom poglavlju opisane su diferencijske jednadžbe. Njihovo je rješenje moguće dobiti pomoću Z transformacije. Definicija Z transformacije je:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k}. \tag{12.1}$$

Da bismo olakšali zapisivanje, mala slova neka predstavljaju vremenski diskretne signala, a velika slova neka predstavljaju njihove Z transformate. Z transformaciju skraćeno ćemo pisati na jedan od dva načina:

$$x[k] \xrightarrow{\mathscr{Z}} X(z) \text{ ili } X(z) = \mathscr{Z}(x[k]).$$

Neka je zadan konačni vremenski diskretan signal (niz) $x[k] = \{\underline{1}, 2, 4, 6, 3, 4\}, k \geq 0$. Prema definiciji, njegova će Z transformacija biti:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k} = 1 + 2z^{-1} + 4z^{-2} + 6z^{-3} + 3z^{-4} + 4z^{-5}$$

.

U diskretanom signalu (nizu) $x[k]$ podcrtani član je član $x[0]$. Navedimo svojstva Z transformacije.

- **Linearnost Z transformacije:**

  Ako vrijedi:

  $$\begin{aligned} x[k] &\xrightarrow{\mathscr{Z}} X(z) \\ y[k] &\xrightarrow{\mathscr{Z}} Y(z), \end{aligned} \tag{12.2}$$

  onda je:

  $$\alpha x[k] + \beta y[k] \xrightarrow{Z} \alpha X(z) + \beta Y(z). \tag{12.3}$$

- **Pomak unaprijed za i koraka:**

$$x[k+i] \quad \xrightarrow{\mathscr{Z}} \quad z^{i}\left(X(z) - \sum_{m=0}^{i-1} x[m]z^{-m}\right). \tag{12.4}$$

  Pomak unazad za i koraka:

$$x[k-i] \quad \xrightarrow{\mathscr{Z}} \quad z^{-i}\left(X(z) + \sum_{m=-i}^{-1} x[m]z^{-m}\right). \tag{12.5}$$

- **Prigušenje eksponencijalnom funkcijom:**

$$a^k x[k] \quad \xrightarrow{\mathscr{Z}} \quad X(a^{-1}z). \tag{12.6}$$

- **Množenje s k:**

$$kx[k] \quad \xrightarrow{\mathscr{Z}} \quad -z\frac{dX(z)}{dz}. \tag{12.7}$$

- **Konvolucija dvaju diskretnih signala:**

$$y[k] = u[k] * g[k] = \sum_{i=0}^{\infty} u[i]g[k-i]z^{-k} \quad \xrightarrow{\mathscr{Z}} \quad Y(z) = U(z)G(z). \tag{12.8}$$

Prema relaciji (12.8) definirajmo prijenosnu funkciju diskretnog sustava:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}. \tag{12.9}$$

Prijenosna funkcija predstavlja Z transformaciju odziva sustava na Kronecker delta signal $\delta[k]$. Tablica osnovnih Z transformata nalazi se u poglavlju 13 PRILOG.

Primjer 12.1.1 Odredite Z transformaciju sljedećih signala prema definiciji:

$$\begin{aligned}
x_1[k] &= 2\mu[k] \\
x_2[k] &= 10\mu[k-2] \\
x_3[k] &= \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
x_4[k] &= 2k \\
x_5[k] &= \delta[k] + 2\delta[k-6] \\
x_6[k] &= 2\cos[\omega k] \\
x_7[k] &= \{\underline{1}, 5, 0, 2, 1, 0, 2\}.
\end{aligned}$$

Za sve navedene signale vrijedi da su jednaki 0 za $k < 0$.

Rješenje Definicija Z transformacije je:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]z^{-k}.$$

Provedimo sada Z transformaciju za zadane signale prema definiciji. U izvodima Z transformata često ćemo sresti sumu geometrijskog reda:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, |q| < 1.$$

Z transformacija signala $x_1[k]$ je:

$$X_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_1[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2\mu[k]z^{-k} = 2\sum_{k=0}^{\infty} 1\cdot z^{-k}$$
$$X_1(z) = 2\sum_{k=0}^{\infty} 1\cdot\left(z^{-1}\right)^k = \frac{2}{1-z^{-1}} = \frac{2z}{z-1}.$$

Z transformacija signala $x_2[k]$ dobivena je na sljedeći način:

$$X_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_2[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 10\mu[k-2]z^{-k} = 10\sum_{k=2}^{\infty} 1\cdot\left(z^{-1}\right)^k.$$

S obzirom da suma počinje od $k = 2$, potrebno je napraviti pomak uvođenjem supstitucije $j = k - 2$:

$$X_2(z) = 10\sum_{j=0}^{\infty} \left(z^{-1}\right)^{j+2} = 10\sum_{j=0}^{\infty} z^{-2}\left(z^{-1}\right)^j = \frac{10z^{-2}}{1-z^{-1}} = \frac{10}{z(z-1)}.$$

Z transformacija signala $x_3[k]$ dobivena je na sljedeći način:

$$X_3(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_3[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^k$$
$$X_3(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}.$$

Z transformacija signala $x_4[k]$ dobivena je na sljedeći način:

$$X_4(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_4[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2kz^{-k} = 2\sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k}.$$

Ovu sumu trenutno ne znamo izračunati. Derivirajmo sumu geometrijskog reda po varijabli q:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} / \frac{d}{dq}$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2} / \cdot q$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

Iskoristimo prethodni izraz za izvod Z transformacije signala $x_4[k]$:

$$X_4(z) = 2\sum_{k=0}^{\infty} kz^{-k} = \frac{2z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{2z}{(z-1)^2}.$$

Z transformacija signala $x_5[k]$ dobivena je na sljedeći način:

$$X_5(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_5[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (\delta[k] + 2\delta[k-6])z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[k]z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} 2\delta[k-6]z^{-k}.$$

S obzirom na definiciju Kronecker delta funkcije:

$$\delta[k] = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}, \delta[k-i] = \begin{cases} 1 & k = i \\ 0 & k \neq i \end{cases}$$

dobit ćemo:

$$X_5(z) = 1 + 2z^{-6} = \frac{z^6+2}{z^6}.$$

Z transformacija signala $x_6[k]$ nešto je složenijeg tipa jer sumu funkcija kosinus nije jednostavno izračunati. Račun postaje jednostavan kada kosinus funkciju zapišemo pomoću Eulerove formule:

$$\cos[\omega k] = \frac{e^{j\omega k} - e^{-j\omega k}}{2}.$$

Slijedi:

$$X_6(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_6[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2\frac{e^{j\omega k} + e^{-j\omega k}}{2} z^{-k} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{j\omega k}}{2} z^{-k} + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-j\omega k}}{2} z^{-k}$$
$$X_6(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{j\omega k} z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} e^{-j\omega k} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{j\omega} z^{-1}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left(e^{-j\omega} z^{-1}\right)^k$$
$$X_6(z) = \frac{1}{1-e^{j\omega}z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-j\omega}z^{-1}} = \frac{1-e^{-j\omega}z^{-1} + 1 - e^{j\omega}z^{-1}}{1 - z^{-1}\left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right) + z^{-2}}$$
$$X_6(z) = \frac{\left(2 - e^{j\omega}z^{-1} - e^{-j\omega z^{-1}}\right)}{1 - z^{-1}\left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right) + z^{-2}} = \frac{2 + z^{-1}\left(-\cos\omega - j\sin\omega - \cos\omega + j\sin\omega\right)}{1 - z^{-1}\left(\cos\omega + j\sin\omega + \cos\omega - j\sin\omega\right) + z^{-2}}$$
$$X_6(z) = \frac{2\left(1 - z^{-1}\cos\omega\right)}{1 - 2z^{-1}\cos\omega + z^{-2}} = \frac{2z\left(z - \cos\omega\right)}{z^2 - 2z\cos\omega + 1}.$$

Z transformacija signala $x_7[k]$ dobivena je na sljedeći način:

$$X_7(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_7[k]z^{-k} = 1 + 5z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4} + 0 \cdot z^{-5} + 2z^{-6}$$
$$X_7(z) = 1 + 5z^{-1} + 2z^{-3} + z^{-4} + 2z^{-6} = \frac{z^6 + 5z^5 + 2z^3 + z^2 + 2}{z^6}.$$

Primjer 12.1.2 Koristeći svojstva Z transformacije odredite Z transformacije sljedećih diskretnih signala:

$$x_1[k] = \mu[k-1]$$
$$x_2[k] = \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}$$
$$x_3[k] = k^2$$
$$x_4[k] = \left(\frac{1}{2}\right)^{k} k \sin[2k].$$

Za sve navedene signale vrijedi da su jednaki 0 za $k < 0$.

Rješenje S obzirom da za sve signale vrijedi da su jednaki 0 za $k < 0$, navedeni signali mogu se pomnožiti s diskretnom jediničnom stepenicom, a da signali i dalje poprimaju iste vrijednosti:

$$x_1[k] = \mu[k-1]$$
$$x_2[k] = \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} \mu[k]$$
$$x_3[k] = k^2\mu[k]$$
$$x_4[k] = \left(\frac{1}{2}\right)^{k} k \sin[2k]\,\mu[k].$$

Signal $x_1[k]$ nije potrebno množiti sa jediničnom stepenicom $\mu[k]$ jer predstavlja upravo pomak te jedinične stepenice. Z transformacija jedinične stepenice je:

$$\mu[k] \xrightarrow{\mathscr{Z}} \tfrac{z}{z-1}.$$

Signal $x_1[k]$ je pomaknuta stepenica za jedan korak unazad pa prema tome možemo iskoristiti svojstvo pomaka unazad:

$$x[k-i] \xrightarrow{\mathscr{Z}} z^{-i}\left(X(z) + \sum_{m=-i}^{-1} x[m]z^{-m}\right)$$
$$\mu[k-1] \xrightarrow{\mathscr{Z}} z^{-1}\left(\tfrac{z}{z-1} + \sum_{m=-1}^{-1} x[m]z^{-m}\right)$$
$$\mu[k-1] \xrightarrow{\mathscr{Z}} \left(\tfrac{1}{z-1} + \mu[-1]\right)$$
$$x_1[k] = \mu[k-1] \xrightarrow{\mathscr{Z}} X(z) = \tfrac{1}{z-1}.$$

Signal $x_2[k]$ možemo transformirati Z transformacijom koristeći svojstvo prigušenja signala eksponencijalnom funkcijom. Ponovno promatramo Z transformaciju jedinične stepenice. Prigušenje signala s eksponencijalnom funkcijom transformira se na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
&a^n x[k] \xrightarrow{\mathscr{Z}} X\left(\tfrac{z}{a}\right)\\
&\mu[k] \xrightarrow{\mathscr{Z}} \tfrac{z}{z-1}\\
&\left(\tfrac{1}{3}\right)^k \mu[k] \xrightarrow{\mathscr{Z}} \frac{\frac{z}{\left(\frac{1}{3}\right)}}{\frac{z}{\left(\frac{1}{3}\right)}-1} = \tfrac{z}{z-\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

Signal $x_2[k]$ može se zapisati i na sljedeći način:

$$x_2[k] = \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k.$$

Zbog linearnosti vrijedi:

$$x_2[k] = \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} = \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)^k \xrightarrow{\mathscr{Z}} X_2(z) = \tfrac{\frac{1}{3}z}{z-\frac{1}{3}}.$$

Signal $x_3[k]$ možemo transformirati Z transformacijom koristeći svojstvo množenja signala s k (dva puta uzastopno):

$$\begin{aligned}
&k x[k] \xrightarrow{\mathscr{Z}} -z\tfrac{dX(z)}{dz}\\
&\mu[k] \xrightarrow{\mathscr{Z}} \tfrac{z}{z-1}\\
&k\mu[k] \xrightarrow{\mathscr{Z}} -z\left(\tfrac{d}{dz}\left(\tfrac{z}{z-1}\right)\right)\\
&\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) = \frac{z-1-z}{(z-1)^2} = -\frac{1}{(z-1)^2}\\
&k\mu[k] \xrightarrow{\mathscr{Z}} \tfrac{z}{(z-1)^2}\\
&k^2\mu[k] = k\left(k\mu[k]\right) \xrightarrow{\mathscr{Z}} -z\left(\tfrac{d}{dz}\left(\tfrac{z}{(z-1)^2}\right)\right)\\
&\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{(z-1)^2}\right) = \frac{(z-1)^2-2z(z-1)}{(z-1)^4} = \frac{-z-1}{(z-1)^3}\\
&k^2\mu[k] \xrightarrow{\mathscr{Z}} \tfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}.
\end{aligned}$$

Signal $x_4[k]$ možemo transformirati Z transformacijom koristeći svojstvo množenja signala s k, a zatim svojstvo prigušenja eksponencijalnom funkcijom. Iz tablice Z transformacije možemo pročitati:

$$\sin[\omega k] \xrightarrow{\mathscr{Z}} \tfrac{z\sin\omega}{z^2-2z\cos\omega+1},$$

iz čega slijedi:

$$\sin[2k] \qquad \tfrac{z\sin 2}{z^2-2z\cos 2+1}.$$

Pomnožimo sada signal $\sin(2k)$ s k te iskoristimo svojstvo množenja s k:

$$k\sin[2k] \quad \xrightarrow{\mathscr{Z}} \quad -z\tfrac{d}{dz}\left(\tfrac{z\sin 2}{z^2-2z\cos 2+1}\right)$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{z\sin 2}{z^2-2z\cos 2+1}\right) = \frac{\sin 2\left(z^2-2z\cos 2+1\right) - z\sin 2\left(2z-2\cos 2\right)}{\left(z^2-2z\cos 2+1\right)^2} =$$

$$= \frac{-z^2\sin 2+\sin 2}{\left(z^2-2z\cos 2+1\right)^2}$$

$$k\sin[2k] \quad \xrightarrow{\mathscr{Z}} \quad \tfrac{z\left(z^2\sin 2-\sin 2\right)}{\left(z^2-2z\cos 2+1\right)^2}.$$

Kada množimo neki signal s eksponencijalnim članom a^k, tada u Z transformatu varijablu z dijelimo s a. U signalu $x_4[k]$, $a = 1/2$, $z/a = 2z$. Slijedi:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k k\ \sin[2k] \quad \xrightarrow{\mathscr{Z}} \quad \tfrac{2z\left(4z^2\sin 2-\sin 2\right)}{\left(4z^2-4z\cos 2+1\right)^2}.$$

Primjer 12.1.3 Odredite Z transformaciju konvolucije signala:

$$x_1[k] = k$$
$$x_2[k] = \sin(5k).$$

Za navedene signale vrijedi da su jednaki 0 za k $<$ 0.

Rješenje Za Z transformaciju konvolucije signala vrijedi:

$$x_1[k]*x_2[k] = \sum_{i=0}^{\infty} x_1[i]x_2[k-i]z^{-k} \quad \xrightarrow{\mathscr{Z}} \quad X_1(z)X_2(z)$$

Z transformacije signala $x_1[k]$ i $x_2[k]$:

$$x_1[k] = k \quad \xrightarrow{\mathscr{Z}} \quad X_1(z) = \tfrac{z}{(z+1)^2}$$
$$x_2[k] = \sin[5k] \quad \xrightarrow{\mathscr{Z}} \quad X_2(z) = \tfrac{z\sin 5}{z^2-2z\cos 5+1}.$$

Slijedi:

$$x_1[k]*x_2[k] = \sum_{i=0}^{\infty} x_1[i]x_2[k-i]z^{-k} \quad \xrightarrow{\mathscr{Z}} \quad \tfrac{z}{(z+1)^2}\tfrac{z\sin 5}{z^2-2z\cos 5+1}.$$

Primjer 12.1.4 Odredite prijenosnu funkciju sustava opisanog diferencijskom jednadžbom:

$$y[k] + 0.5y[k-1] + 1.5y[k-2] = u[k].$$

Rješenje Prijenosna funkcija određuje se na mirnom sustavu (sustav čiji su početni uvjeti jednaki nuli). Za vremenski pomaknute izlazne signale vrijedi:

$$\begin{aligned}
y[k] &\xrightarrow{\mathscr{Z}} Y(z)\\
y[k-1] &\xrightarrow{\mathscr{Z}} z^{-1}Y(z) - y[-1] = z^{-1}Y(z)\\
y[k-2] &\xrightarrow{\mathscr{Z}} z^{-2}Y(z) - z^{-1}y[-1] - y[-2] = z^{-2}Y(z)\\
u[k] &\xrightarrow{\mathscr{Z}} U(z).
\end{aligned}$$

Iz navedenog slijedi prijenosna funkcija diskretnog sustava:

$$\begin{aligned}
&y[k] + 0.5y[k-1] + 1.5y[k-2] = u[k] \quad \xrightarrow{\mathscr{Z}}\\
&Y(z) + 0.5z^{-1}Y(z) + 1.5z^{-2}Y(z) = U(z)\\
&Y(z)\left(1 + 0.5z^{-1} + 1.5z^{-2}\right) = U(z)\\
&G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{1 + 0.5z^{-1} + 1.5z^{-2}}\frac{z^2}{z^2}\\
&G(z) = \frac{z^2}{z^2 + 0.5z + 1.5}.
\end{aligned}$$

12.1.1 Zadaci za vježbu

Zadatak 12.1.1 Odredite Z transformaciju sljedećih signala prema definiciji:

$$\begin{aligned}
x_1[k] &= 5\mu[k]\\
x_2[k] &= 2\mu[k-5]\\
x_3[k] &= \left(\frac{3}{4}\right)^{(k-1)}\\
x_4[k] &= 5k^2\\
x_5[k] &= \delta[k-1] + 3\delta[k-3] + 5\delta[k-5]\\
x_6[k] &= 2\sin[\omega k]\\
x_7[k] &= \{\underline{2}, 0, -3, 2, 1, 9, 2\}.
\end{aligned}$$

Za sve navedene signale vrijedi da su jednaki 0 za $k < 0$.

Zadatak 12.1.2 Koristeći svojstva Z transformacije odredite Z transformacije sljedećih diskretnih signala:

$$\begin{aligned}
x_1[k] &= \mu[k+1]\\
x_2[k] &= \left(\frac{2}{5}\right)^{k-2}\\
x_3[k] &= k^3\\
x_4[k] &= \left(\frac{2}{3}\right)^{k} k\cos[3k].
\end{aligned}$$

Za sve navedene signale vrijedi da su jednaki 0 za $k < 0$.

Zadatak 12.1.3 Odredite Z transformaciju konvolucije signala:

$$x_1[k] = \left(\frac{2}{3}\right)^k$$
$$x_2[k] = \cos[5k].$$

Za navedene signale vrijedi da su jednaki 0 za $k < 0$.

Zadatak 12.1.4 Odredite prijenosnu funkciju sustava opisanog diferencijskom jednadžbom:

$$y[k] + 1.5y[k-1] + 0.55y[k-2] = 2u[k].$$

12.2 Inverzna Z transformacija

Kako bismo uz pomoć Z transformacije riješili diferencijsku jednadžbu potrebno je algebarski izraz transformirati u vremenski diskretnu domenu. To ćemo riješiti pomoću inverzne Z transformacije. Inverznu Z transformaciju skraćeno ćemo pisati na jedan od dva načina:

$$X(z) \xrightarrow{\mathscr{Z}^{-1}} x[k] \text{ ili } x[k] = \mathscr{Z}^{-1}(X(z)).$$

Dvije su osnovne metode inverzne Z transformacije:

1. metoda dijeljenja
2. metoda prostih razlomaka.

Neka je diskretna funkcija $X(z)$ dana relacijom:

$$X(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + ... + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0}, \tag{12.10}$$

tada se metoda dijeljenja svodi na dijeljenje brojnika s nazivnikom:

$$\begin{aligned}&\left(b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + ... + b_1 z + b_0\right) : \left(a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0\right) = \\ &= K_0 z^{m-n} + K_1 z^{m-n-1} + ... + K_k z^{m-n-k} + ...\end{aligned} \tag{12.11}$$

ili

$$X(z) = K_0 z^{m-n} + K_1 z^{m-n-1} + ... + K_i z^{m-n-i} + ... \tag{12.12}$$

Koristeći tablice Z transformacije uočavamo da z^{-i} predstavlja kašnjenje $\delta[k]$ funkcije za i koraka. Primijenimo ovo svojstvo na izraz (12.12):

$$x[k] = K_0\delta[k+m-n] + K_1\delta[k+m-n-1] + ... + K_i\delta[k+m-n-i] + ... \tag{12.13}$$

Izraz (12.12) prikazuje inverznu Z transformaciju izraza (12.10). Pokušajmo metodom dijeljenja naći inverznu Z transformaciju jedinične skokovite funkcije:

$$\begin{aligned}X(z) &= \frac{z}{z-1}\\ X(z) &= z : (z-1) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + ... \xrightarrow{\mathscr{Z}^{-1}}\\ x[k] &= \delta[k] + \delta[k-1] + \delta[k-2] + \delta[k-3] + ...\\ x[k] &= \sum_{i=0}^{\infty} \delta[k-i] = \mu[k].\end{aligned}$$

Dobili smo niz jediničnih impulsa za $k \geq 0$ što predstavlja jediničnu stepenicu.

Druga metoda se svodi na razvoj diskretne funkcije $X(z)$ (izraza (12.10)) na proste razlomke:

$$X(z) = \frac{K_1 z}{z - p_1} + \frac{K_2 z}{z - p_2} + ... + \frac{K_n z}{z - p_n}. \tag{12.14}$$

Koeficijenti $K_1, K_2, ..., K_n$ mogu se dobiti metodom reziduala (*Heavisideov* razvoj) ili metodom izjednačavanja koeficijenata uz iste potencije kompleksne varijable z (ove metode detaljno smo obradili u poglavlju Inverzna Laplaceova transformacija). Kada se koristi metoda reziduala, tada se najprije diskretna funkcija $X(z)$ podijeli sa z kako bi se mogla koristiti ista pravila kao i kod inverzne Laplaceove transformacije:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{K_1}{z - p_1} + \frac{K_2}{z - p_2} + ... + \frac{K_n}{z - p_n}. \tag{12.15}$$

Sada se metodom reziduala pronađu koeficijenti $K_1, K_2, ..., K_n$ te se ponovno funkcija $X(z)/z$ pomnoži sa z:

$$X(z) = \frac{K_1 z}{z - p_1} + \frac{K_2 z}{z - p_2} + ... + \frac{K_n z}{z - p_n}. \tag{12.16}$$

Nakon toga se uz pomoć tablica napravi inverzna Z transformacija:

$$x[k] = K_1 (p_1)^k + K_2 (p_2)^k + ... + K_n (p_n)^k. \tag{12.17}$$

Koeficijente $K_1, K_2, ..., K_n$ također je moguće naći i metodom izjednačavanja koeficijenata uz iste potencije kompleksne varijable z. Nakon rastava diskretne prijenosne funkcije $X(z)$ na proste razlomke inverznu Z transformaciju napravit ćemo uz pomoć tablica koje se nalaze u poglavlju 13 PRILOG.

Primjer 12.2.1 Odredite inverznu Z transformaciju sljedećih transformata koristeći tablice Z transformacije:

$$\begin{aligned} X_1(z) &= \frac{2z}{z-1} \\ X_2(z) &= \frac{4z}{7z-2} \\ X_3(z) &= \frac{\frac{4}{5}z}{(z-2)^2}. \end{aligned}$$

Rješenje Svi navedeni Z transformati mogu se transformirati u vremenski diskretnu domenu koristeći tablice inverzne Z transformacije. Prije korištenja tablice Z transformacije, izraze koje transformiramo u vremenski diskretnu domenu potrebno je prilagoditi tabličnim transformatima:

$$\begin{aligned} X_1(z) &= \frac{2z}{z-1} = 2\frac{z}{z-1} \\ X_2(z) &= \frac{4z}{7z-2} = \frac{4}{7}\frac{z}{z-\frac{2}{7}} \\ X_3(z) &= \frac{\frac{4}{5}z}{(z-2)^2} = \frac{2}{5}\frac{2z}{(z-2)^2}. \end{aligned}$$

Slijedi:

$$X_1(z) = 2\tfrac{z}{z-1} \xrightarrow{\mathscr{Z}^{-1}} x_1(k) = 2\mu[k]$$
$$X_2(z) = \tfrac{4}{7}\tfrac{z}{z-\frac{2}{7}} \xrightarrow{\mathscr{Z}^{-1}} x_2(k) = \tfrac{4}{7}\left(\frac{2}{7}\right)^k$$
$$X_3(z) = \tfrac{2}{5}\tfrac{2z}{(z-2)^2} \xrightarrow{\mathscr{Z}^{-1}} x_3(k) = \tfrac{2}{5}k(2)^k.$$

Primjer 12.2.2 Odredite inverznu Z transformaciju sljedećeg transformata:

$$X(z) = \frac{z}{(z^2 - 0.9z + 0.2)}.$$

Rješenje Zadanu diskretnu funkciju $X(z)$ u Z domeni potrebno je rastaviti na proste razlomke i podijeliti ga sa z kako bi se mogla koristiti metoda reziduala:

$$X(z) = \frac{z}{(z^2 - 0.9z + 0.2)} / : z \Rightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z^2 - 0.9z + 0.2)}.$$

Nadalje, potrebno je odrediti polove od $X(z)/z$:

$$\begin{aligned} z^2 - 0.9z + 0.2 = 0 &\Rightarrow z_{1,2} = \frac{0.9 \pm \sqrt{0.9^2 - 0.8}}{2} \\ z_{1,2} = \frac{0.9 \pm 0.1}{2} &\Rightarrow z_1 = 0.5, z_2 = 0.4 \end{aligned}.$$

Sada $X(z)/z$ možemo zapisati u obliku prostih razlomaka na sljedeći način:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A}{z - 0.5} + \frac{B}{z - 0.4}.$$

Koeficijente A i B možemo izračunati metodom reziduala:

$$A = \lim_{z\to 0.5}(z - 0.5)\frac{X(z)}{z} = \lim_{z\to 0.5}\frac{1}{(z - 0.4)} = 10$$
$$B = \lim_{z\to 0.4}(z - 0.4)\frac{X(z)}{z} = \lim_{z\to 0.4}\frac{1}{(z - 0.5)} = -10$$
$$\frac{X(z)}{z} = \frac{-10}{z - 0.4} + \frac{10}{z - 0.5} \Rightarrow X(z) = \frac{10z}{z - 0.5} - \frac{10z}{z - 0.4}$$

ili metodom izjednačavanja koeficijenata uz iste potencije kompleksne varijable z:

$$\begin{aligned}
&\frac{X(z)}{z} = \frac{A}{z-0.5} + \frac{B}{z-0.4} = \frac{1}{(z^2-0.9z+0.2)} / \cdot (z-0.5)(z-0.4) \\
&A(z-0.4) + B(z-0.5) = 1 \\
&Az - 0.4A + Bz - 0.5B = 1 \\
&A + B = 0 / \cdot 0.4 \\
&\underline{-0.4A - 0.5B = 1} \\
&0.4A + 0.4B = 0 / \cdot 0.4 \\
&\underline{-0.4A - 0.5B = 1} \\
&-0.1B = 1 \Rightarrow B = -10 \\
&A = -B = 10 \\
&\frac{X(z)}{z} = \frac{-10}{z-0.4} + \frac{10}{z-0.5} \Rightarrow X(z) = \frac{10z}{z-0.5} - \frac{10z}{z-0.4}.
\end{aligned}$$

Sada rastavljenu diskretnu funkciju $X(z)$ možemo transformirati u vremenski diskretnu domenu inverznom Z transformacijom:

$$X(z) = \tfrac{10z}{z-0.5} - \tfrac{10z}{z-0.4} \quad \xrightarrow{\mathscr{Z}^{-1}} \quad x[k] = 10 \cdot (0.5)^k - 10 \cdot (0.4)^k$$

Primjer 12.2.3 Odredite prvih pet članova odziva sustava $y[k]$ opisanog prijenosnom funkcijom $G(z)$ na ulaznu pobudu jedinične stepenice:

$$G(z) = \tfrac{z}{z-2}.$$

Početni uvjet jednak je nuli.

Rješenje Prijenosna funkcija diskretnog sustava definirana je kao:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}.$$

Jedinična stepenica ima sljedeći Z transformat:

$$\mu(k) \quad \xrightarrow{\mathscr{Z}} \quad \tfrac{z}{z-1}.$$

Prvih pet članova odziva sustava $y[k]$ dobit ćemo dijeljenjem polinoma (brojnika s nazivnikom) diskretne funkcije $Y(z)$:

$$
\begin{aligned}
&Y(z) = G(z)U(z) = \frac{z}{z-2}\frac{z}{z-1} = \frac{z^2}{z^2-3z+2}\\
&z^2 : (z^2-3z+2) = 1 + 3z^{-1} + 7z^{-2} + 15z^{-3} + 31z^{-4}\\
&\underline{\pm z^2 \mp 3z \pm 2}\\
&\quad 3z-2\\
&\quad \underline{\pm 3z \mp 9 \pm 6z^{-1}}\\
&\qquad 7-6z^{-1}\\
&\qquad \underline{\pm 7 \mp 21z^{-1} \pm 14z^{-2}}\\
&\qquad\qquad 15z^{-1} - 14\ z^{-2}\\
&\qquad\qquad \underline{\pm 15z^{-1} \mp 45z^{-2} \pm 30z^{-3}}\\
&\qquad\qquad\quad \underline{31z^{-2} - 30z^{-3}}.
\end{aligned}
$$

Prvih pet članova odziva su $x[k] = \{\underline{1}, 3, 7, 15, 31, ...\}$.

Primjer 12.2.4 Sustav je opisan sljedećom diferencijskom jednadžbom:

$$y[k] + 2y[k-1] + y[k-2] = u[k].$$

Početni su uvjeti: $y[-1] = 0$, $y[-2] = 0$. Odredite odziv sustava $y[k]$ pomoću Z transformacije na pobudu $u[k] = 2^k$.

Rješenje Sustav opisan diferencijskom jednadžbom potrebno je opisati prijenosnom funkcijom:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}.$$

Koristeći svojstva Z trasformacije za zadan sustav vrijedi:

$$
\begin{aligned}
&u[k] \quad \overset{\mathscr{Z}}{\longrightarrow} \quad U(z)\\
&y[k] \quad \overset{\mathscr{Z}}{\longrightarrow} \quad Y(z)\\
&y[k-1] \qquad z^{-1}Y(z) + y[-1] = z^{-1}Y(z)\\
&y[k-2] \quad \overset{\mathscr{Z}}{\longrightarrow} \quad z^{-2}Y(z) + z^{-1}y[-1] + y[-2] = z^{-2}Y(z).
\end{aligned}
$$

Prijenosna funkcija zadanog sustava je:

$$
\begin{aligned}
&y[k] + 2y[k-1] + y[k-2] = u[k]\\
&Y(z) + 2z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) = U(z) \Rightarrow\\
&G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{1+2z^{-1}+z^{-2}}\frac{z^2}{z^2} = \frac{z^2}{z^2+2z+1}.
\end{aligned}
$$

Pobuda sustava u Z domeni je:

$$u[k] = 2^k \quad \overset{\mathscr{Z}}{\longrightarrow} \quad U(z) = \tfrac{z}{z-2}.$$

Sada možemo izračunati odziv sustava u Z domeni $Y(z)$:

$$Y(z)=G(z)U(z)=\frac{z^2}{z^2+2z+1}\frac{z}{z-2}=\frac{z^3}{\left(z^2+2z+1\right)(z-2)}.$$

Odziv sustava u Z domeni potrebno je podijeliti sa z kako bi mogli rastaviti odziv sustava $Y(z)$ na proste razlomke:

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{z^2}{\left(z^2+2z+1\right)(z-2)}.$$

Polovi odziva sustava $Y(z)$ su:

$$\begin{aligned}
&\left(z^2+2z+1\right)(z-2)=0\\
&z^2+2z+1=0 \land z-2=0\\
&z_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-4}}{2}=-1\Rightarrow z_1=-1, z_2=-1\\
&z-2=0\Rightarrow z_3=2.
\end{aligned}$$

S obzirom da imamo višestruke polove, rastav na proste razlomke je (vidjeti pravila rastava u poglavlju Inverzna Laplaceova transformacija):

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{(z+1)^2}+\frac{C}{z-2}.$$

Koeficijente A, B i C odredit ćemo metodom izjednačavanja koeficijenata uz iste potencije kompleksne varijable z:

$$\begin{aligned}
&\frac{Y(z)}{z}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{(z+1)^2}+\frac{C}{z-2}\\
&\frac{A}{z+1}+\frac{B}{(z+1)^2}+\frac{C}{z-2}=\frac{z^2}{\left(z^2+2z+1\right)(z-2)}/\cdot\left(z^2+2z+1\right)(z-2)\\
&A(z+1)(z-2)+B(z-2)+C(z+1)^2=z^2\\
&A\left(z^2-z-2\right)+B(z-2)+C(z^2+2z+1)=z^2\\
&A+C=1\Rightarrow A=1-C\\
&-A+B+2C=0\\
&\underline{-2A-2B+C=0}\\
&-1+C+B+2C=0/\cdot(-1)\\
&\underline{-2+2C-2B+C=0}\\
&-B-3C=-1\\
&\underline{-2B+3C=2}\\
&-3B=1\Rightarrow B=-\frac{1}{3}\\
&B+3C=1\Rightarrow C=\frac{1}{3}(1-B)=\frac{4}{9}\\
&A=1-C=\frac{5}{9}.
\end{aligned}$$

Uvrstimo sada dobivene koeficijente u rastav na proste razlomke i prilagodimo zapis za tablicu Z transformacije:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{\frac{5}{9}}{z+1} - \frac{\frac{1}{3}}{(z+1)^2} + \frac{\frac{4}{9}}{z-2} / \cdot z$$
$$Y(z) = \frac{\frac{5}{9}z}{z+1} - \frac{\frac{1}{3}z}{(z+1)^2} + \frac{\frac{4}{9}z}{z-2}$$
$$Y(z) = \frac{5}{9}\frac{z}{z-(-1)} + \frac{1}{3}\frac{(-1)z}{(z-(-1))^2} + \frac{4}{9}\frac{z}{z-2}.$$

Inverznom Z transformacijom dobili smo odziv sustava:

$$y[k] = \frac{5}{9}(-1)^k + \frac{1}{3}k(-1)^k + \frac{4}{9}(2)^k.$$

12.2.1 Zadaci za vježbu

Zadatak 12.2.1 Odredite inverznu Z transformaciju sljedećih transformata koristeći tablice Z transformacije:

$$X_1(z) = \frac{4z}{z-1}$$
$$X_2(z) = \frac{2z}{z-\frac{1}{3}}$$
$$X_3(z) = \frac{\frac{2}{7}\left(z+\frac{2}{3}\right)}{\left(z-\frac{2}{3}\right)^3}.$$

Zadatak 12.2.2 Odredite inverznu Z transformaciju sljedećeg transformata:

$$X(z) = \frac{2z^2}{(z^2+0.5z+0.06)}.$$

Zadatak 12.2.3 Odredite prvih šest članova odziva sustava $y[k]$ opisanog prijenosnom funkcijom $G(z)$ na ulaznu pobudu jedinične stepenice:

$$G(z) = \frac{z}{(z^2+z-0.5)}.$$

Početni uvjet jednak je nuli.

Zadatak 12.2.4 Sustav je opisan sljedećom diferencijskom jednadžbom:

$$y[k] + 3y[k-1] + 2y[k-2] = u[k].$$

Početni su uvjeti: $y[-1] = 0$, $y[-2] = 0$. Odredite odziv sustava $y[k]$ pomoću Z transformacije na pobudu $u[k] = (\frac{1}{2})^k$.

Poglavlje 13

PRILOG

13.1 Trigonometrijske formule

Trigonometrijski identiteti:

$$\begin{array}{ll} \sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\cos t & \cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=\sin t \\ \sin(-t)=-\sin t & \cos(-t)=\cos t \\ \sin(\pi-t)=\sin t & \cos(\pi-t)=-\cos t \\ \sin^2 t+\cos^2 t=1 & \end{array}$$

Adicijski teoremi:

$$\sin(t\pm\varphi)=\sin t\cos\varphi\pm\cos t\sin\varphi$$

$$\cos(t\pm\varphi)=\cos t\cos\varphi\mp\sin t\sin\varphi$$

$$\tan(t\pm\varphi)=\frac{\tan(t)\pm\tan(\varphi)}{1\mp\tan t\tan\varphi}$$

Trigonometrijske funkcije dvostrukih argumenata:

$$\sin(2t)=2\sin t\cos t$$

$$\cos(2t)=\cos^2 t-\sin^2 t$$

$$\tan(2t)=\frac{2\tan t}{1-\tan^2 t}$$

Trigonometrijske funkcije polovičnih argumenata:

$$\sin\frac{t}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos^2(2t)}{2}}$$

$$\cos\frac{t}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos^2(2t)}{2}}$$

$$\tan\frac{t}{2}=\pm\frac{\sin t}{1+\cos t}$$

13.2 Tablica Laplaceovih transformacija

$x(t)$	$X(s)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-t_0 s}$
$\mu(t)$	$\frac{1}{s}$
$\mu(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$t^n \ (n=0,1,2,\dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}x(t)$	$X(s+a)$
$x(t-a)\mu(t-a)$	$e^{-as}X(s)$
$(-t)^n x(t)$	$\frac{d^n X(s)}{ds^n}$
$x'(t)$	$sX(s)-x(0)$
$x^{(n)}(t)$	$s^n X(s) - s^{(n-1)}x(0) - \cdots - x^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$
$x(t)*g(t) = \int_0^t x(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$X(s)G(s)$
$\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$	$\lim\limits_{s\to 0} sX(s)$

13.3 Tablica Z transformacija

$x[k]$	$X(z)$
$\delta[k]$	1
$\delta[k-k_0]$	z^{-k_0}
$\mu[k]$	$\dfrac{z}{z-1}$
$\mu[k-k_0]$	$z^{-k_0}\dfrac{z}{z-1}$
k	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
k^2	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
a^k	$\dfrac{z}{z-a}$
$1-a^k$	$\dfrac{(1-a)z}{(z-1)(z-a)}$
$a^k k$	$\dfrac{az}{(z-a)^2}$
$a^k k^2$	$\dfrac{z(z+a)}{(z-a)^3}$
$\sin[\omega k]$	$\dfrac{z\sin(\omega)}{z^2-2z\cos(\omega)+1}$
$\cos[\omega k]$	$\dfrac{z(z-\cos(\omega))}{z^2-2z\cos(\omega)+1}$
$a^k\sin[\omega k]$	$\dfrac{az\sin(\omega)}{z^2-2az\cos(\omega)+a^2}$
$a^k\cos[\omega k]$	$\dfrac{z(z-a\cos(\omega))}{z^2-2az\cos(\omega)+a^2}$
$x[k-k_0]$	$z^{-k_0}X(z)$
$a^k x[k]$	$X(a^{-1}z)$
$(-k)^n x[k]$	$\dfrac{d^nX(z)}{dz^n}$
$x[k]-x[k-1]$	$(1-z^{-1})X(z)$
$x[k]*g[k]$	$X(z)G(z)$
$\lim\limits_{k\to\infty} x[k]$	$\lim\limits_{z\to 1}(z-1)X(z)$

13.4 Tablica i pravila deriviranja

Pravila deriviranja:

Ako je c konstanta, a $u = f(t)$, $v = g(t)$ funkcije koje imaju derivacije, onda je:

$$(c)' = 0, \qquad (uv)' = u'v + v'u,$$

$$(t)' = 1, \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \qquad \left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

$$(cu)' = cu',$$

Derivacija složenih funkcija:

$$(f(g(t)))' = f'(g(t)) \cdot g'(t)$$

Tablica derivacija:

$$(t^n)' = nt^{n-1} \quad n \in \mathbb{R}, \qquad (\arccos t)' = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad |\, t \,| < 1$$

$$\left(\sqrt{t}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad t > 0 \qquad (\operatorname{arctg} t)' = \frac{1}{1+t^2},$$

$$(\sin t)' = \cos t \qquad (\operatorname{arcctg} t)' = -\frac{1}{1+t^2},$$

$$(\cos t)' = -\sin t \qquad (a^t)' = a^t \ln a \quad a > 0$$

$$(\operatorname{tg} t)' = \frac{1}{\cos^2 t}, \qquad (e^t)' = e^t$$

$$(\operatorname{ctg} t)' = -\frac{1}{\sin^2 t}, \qquad (\ln t)' = \frac{1}{t} \quad t > 0,$$

$$(\arcsin t)' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad |\, t \,| < 1 \qquad (\log_a t)' = \frac{1}{t \ln a} \quad t > 0, \quad a > 0.$$

13.5 Tablica i pravila integriranja

Tablica integrala:

1. $\int dt = t + C$
2. $\int t^n \; dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C, \qquad (n \neq -1)$
3. $\int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C$
4. $\int e^t \; dt = e^t + C$
5. $\int a^t \; dt = \frac{a^t}{\ln a} + C, \qquad (a > 0, \; a \neq 1)$
6. $\int \cos t \; dt = \sin t + C$
7. $\int \sin t \; dt = -\cos t + C$
8. $\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tg} t + C$
9. $\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\operatorname{ctg} t + C$
10. $\int \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C, \qquad (a > 0)$
11. $\int \frac{dt}{a^2-t^2} = \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{t+a}{t-a}\right| + C, \qquad (a > 0)$
12. $\int \frac{dt}{\sqrt{a^2+t^2}} = \ln \left(t + \sqrt{a^2+t^2}\right) + C, \qquad (a > 0)$
13. $\int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = \arcsin\frac{t}{a} + C, \qquad (a > 0)$
14. $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-a^2}} = \ln \left|t + \sqrt{t^2-a^2}\right| + C, \qquad (a > 0)$

Linearnost integriranja (a i b su konstante):

$$\int (av(t) \pm bu(t))dt = \int av(t)dt \pm \int bu(t)dt$$

Parcijalno integriranje:

$$\int v(t)du(t) = v(t)u(t) - \int u(t)dv(t)$$

Bibliografija

[1] Elezović, N., Fourierov red i integral, Laplaceova transformacija, Element, Zagreb 2007.

[2] Babić, H., SIGNALI I SUSTAVI, FER - Zavod za elektroničke sustave i obradbu informacija, Zagreb, 1996.

[3] Vrankić, M., Zbirka zadataka iz sustava i signala, Graphis, Zagreb, 2007.

[4] Karris, S.T., Signals and Systems with MATLAB Computing and Simulink Modeling, 2008.

[5] Sundararajan, D., A PRACTICAL APPROACH TO SIGNALS AND SYSTEMS, John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd, 2008.

[6] Matika, D., Sustavi digitalnog upravljanja. Graphis, Zagreb, 2005.

www.vtsbj.hr

ISBN 978-953-7676-23-0